



Universitatea
Transilvania
din Brașov

TEZĂ DE ABILITARE REZUMAT

Titlu:

Contribuții în geometria Finsler complexă. Modele de navigație optimă sub influența gravitației - O abordare Finsler

Domeniul: Matematică

Autor: Conf. dr. Codruța Nicoleta Aldea
Universitatea Transilvania din Brașov

Brașov, 2025

Rezumat

Obiectivul acestei teze este prezentarea principalelor contribuții ale autorului la dezvoltarea geometriei Finsler complexe precum și cele referitoare la extinderi ale problemei Matsumoto pe panta muntelui, printr-un model general de navigație optimă, bazat pe geometria Riemann-Finsler, stabilind legături directe cu problema de navigație Zermelo.

Pentru a studia probleme referitoare la spațiile Landsberg complexe, proiectivitate, curbă olomorfă, deformări, etc., sunt combinate tehnici din geometria Finsler reală cu elemente specifice spațiilor Finsler complexe. Problemele clasice (problema Matsumoto a pantei muntelui MAT și problema de navigație Zermelo ZNP), prezentate în literatura de specialitate independent, sunt intens studiate prin intermediul geometriei Riemann-Finsler deoarece în geometria Finsler, noțiunea de lungime de arc desemnează timpul și atunci, traiectoriile optime ca timp sunt local, geodezicele corespunzătoare metricilor Finsler. Tendințele moderne spre aplicații, impun dezvoltarea de noi modele. Caracteristicile principale ale modelelor de navigație descrise aici sunt tipul și gradul de compensare ale efectului gravitației asupra pantei muntelui. Acestea permit descrierea mai multor probleme de navigație și în particular, leagă problema MAT de cea a navigației Zermelo sub influența gravitației.

Teza are două părți: Partea I. *Câteva aspecte din geometria Finsler complexă* care cuprinde primele cinci capitole (Capitolele 1-5) și Partea a II-a. *Extensii ale problemei Matsumoto a pantei muntelui* cu patru capitole (Capitolele 6-9). La finalul tezei, într-un capitol separat, sunt menționate câteva direcții de cercetare care au apărut pe parcursul descrierii rezultatelor din teză și care ar putea fi dezvoltate. În continuare, prezentăm pe scurt fiecare parte a tezei.

Partea I. Această parte cuprinde câteva probleme pe care le-am studiat în geometria Finsler complexă, rezultatele descrise aici fiind publicate în articolele [24, 25, 26, 27, 36, 23, 9, 14]. Capitolul 1 prezintă pe scurt principalele instrumente, specifice geometriei Finsler complexe, care sunt utilizate de-a lungul acestei părți. În Capitolul 2 prezentăm spațiile Landsberg complexe și Berwald generalizate, precum și câteva cazuri particulare de spații Landsberg complexe. Între situațiile care apar în cazul complex, comparativ cu cele din cazul real, există deosebiri semnificative, numai dacă se ia în seamă faptul că în geometria Finsler complexă există două derivate covariante orizontale diferite (conjugate), în particular pentru tensorii Cartan complecși acestea sunt $C_{i\bar{j}k|h}$ și $C_{i\bar{j}k|\bar{h}}$, în raport cu conexiunea Chern-Finsler. Este important de menționat faptul că o condiție de forma $C_{l\bar{r}h|k} = 0$ este echivalentă cu $C_{l\bar{r}h|\bar{k}} = 0$ și mai mult, în acest caz, coeficienții orizontali L_{jk}^i ai conexiunii Chern-Finsler depind doar de punctele z de pe varietate. Probabil că acesta a fost principalul motiv care l-a determinat pe T. Aikou să denumească spațiile Finsler complexe care au proprietatea că $L_{jk}^i = L_{jk}^i(z)$, spații Berwald complexe [7]. Cu toate acestea, condiția ca un spațiu să fie Berwald complex poate fi exprimată prin independența coeficienților orizontali G_{jk}^i ai unei conexiuni liniare de tip Berwald BF , de coordonatele direcțiilor tangente, doar în cazul în care spațiul este Kähler,

adică atunci când $L_{jk}^i = G_{jk}^i$. Așadar, o extensie incontestabilă a spațiilor Berwald complexe, în legătură directă cu $B\Gamma$, este dată de spațiile Berwald generalizate caracterizate prin faptul că funcțiile G_{jk}^i depind doar de poziția z . Pentru a studia spațiile Landsberg complexe, utilizăm alături de $B\Gamma$, și o altă conexiune liniară complexă de tip Rund $R\Gamma$, amândouă fiind asociate conexiunii neliniare canonice. Mai exact, un spațiu Landsberg complex satisface condiția $L_{jk}^i = G_{jk}^i$ care se referă la coeficienții orizontali ai conexiunilor $R\Gamma$ și $B\Gamma$. Până acum se cunoaște faptul că metricile Kähler și Kähler-Berwald sunt metrici Landsberg complexe, dar existența unor exemple de metrici Landsberg complexe care nu sunt nici Kähler-Berwald și nici Kähler este o problemă deschisă. Teoria generală a spațiilor Berwald generalizate este completată cu câteva rezultate speciale referitoare la metricile Randers complexe în Secțiunea 2.3. Rezultatele din acest capitol sunt publicate în articolele [26, 27].

Problema metricilor Finsler complexe proiectiv echivalente este prezentată începând cu Capitolul 3. Secțiunea 3.2 este preponderent canalizată pe versiunile complexe ale teoremei Rapcsák și pe o soluție Finsler complexă a problemei a patra a lui Hilbert. Secțiunea 3.3 explorează proiectivitățile metricilor Randers complexe $\tilde{F} = \alpha + |\beta|$, un rezultat fiind dat de condițiile necesare și suficiente ca metricile $\tilde{F}$ și α să fie proiectiv echivalente [25].

O analiză mai amănunțită a relației de echivalență proiectivă a metricilor Finsler complexe permite stabilirea existenței unor invarianti proiectivi de curbura de tip Douglas și de tip Weyl, în Capitolul 4. Există unele similitudini formale cu studiile din geometria Finsler reală, dar deosebirile dintre cazul real și cel complex sunt mult mai profunde. Mai exact, în Secțiunea 4.2 explorarea relației de echivalență proiectivă conduce la trei invarianti proiectivi de curbura de tip Douglas, iar anularea acestora caracterizează spațiile Douglas complexe. De asemenea, aceasta permite și obținerea unor proprietăți suplimentare pentru spațiile Kähler-Berwald. Prin intermediul unui invariant proiectiv de curbura de tip Weyl se obține o clasificare a spațiile Kähler-Berwald de curbura olomorfă constantă și anume, acestea sunt pur hermitiene, dacă au curbura olomorfă o constantă nenulă sau non-pur hermitiene, dacă au curbura olomorfă nulă. Secțiunea 4.3 este dedicată metricilor Finsler complexe local proiectiv plate. În Secțiunea 4.4 un detaliu esențial este posibilitatea scrierii ecuațiilor curbelor geodezice sub o anumită formă care reduce studiul spațiilor Douglas complexe, la investigarea unor funcții care provin din aceste ecuații. În Secțiunea 4.5 teoria generală a spațiilor Douglas complexe este aplicată spațiilor Randers complexe [24, 23].

În Capitolul 5 considerăm o problemă de navigație Zermelo pe o varietate hermitiană (M, h) și arătăm că soluțiile sunt funcții real omogene, adică $\mathbb{R}$ -metrici Finsler complexe de tip Randers (Secțiunea 5.3). Dincolo de semnificația faptului că navigația Zermelo furnizează o aplicație concretă a $\mathbb{R}$ -metricilor Randers, mult mai important este faptul că prin intermediul acestora pot fi construite explicit metrici non-hermitiene (numite W -deformări Zermelo), obținute prin deformarea metricii hermitiene h , printr-un câmp vectorial W . În Secțiunea 5.4 este prezentat acest aspect, alături de studiul invarianței unor proprietăți ale metricilor hermitiene, ca urmare a W -deformărilor, considerând câmpuri vectoriale W particulare [9, 14].

Partea a II-a. Această parte, bazată pe rezultatele obținute în lucrările [10, 20, 11, 12, 13], prezintă o colecție de probleme de navigație pe panta alunecoasă (versantul alunecos) a unui munte, reprezentat de o varietate riemanniană (M, h) de dimensiune cel puțin doi, sub acțiunea unor "vânturi active", exprimate prin intermediul vântului gravitațional (un câmp vectorial gradient), împreună cu doi coeficienți de tracțiune. Capitolul 6 punctează câteva noțiuni și rezultate de bază din geometria Riemann-Finsler, acestea fiind necesare în prezentarea

celorlalte capitole.

Înainte de a prezenta Capitolele 7-9, se impune o scurtă descriere a tipurilor de probleme de navigație optimă în raport cu timpul, studiate în literatură prin intermediul geometriei Riemann-Finsler, considerând un caz particular, mai exact, în prezența unui vânt gravitațional. Noțiunea de vânt gravitațional introdusă recent în lucrarea [10], în contextul datelor de navigație Zermelo [127, 45, 71, 124, 61] permite o descriere unitară a tuturor problemelor de navigație optimă prezentate în Capitolele 7-9, incluzându-le totodată și pe cele clasice (MAT și ZNP). Aspectul cheie în descrierea modelelor de navigație este dat de tipul și gradul de compensare ale efectului gravitației asupra pantei muntelui care apoi, caracterizează ecuațiile de mișcare și în consecință, metrica Finsler corespunzătoare fiecărui caz. În continuare ne referim la cele două probleme clasice, investigate inițial de E. Zermelo respectiv, M. Matsumoto [156, 157, 106].

ZNP se referă la determinarea celor mai rapide traiectorii ale unei ambarcațiuni care se deplasează cu o viteză maximă în raport cu un mediu înconjurător, între două locații pe mare sau în aer, în prezența unui curent (vânt) variabil, exprimat printr-un câmp vectorial W . Problema a fost reformulată și generalizată la varietăți riemanniene (M, h) de dimensiune arbitrară, cu soluții în geometria Finsler și spațiu-timp [127, 71, 45, 87, 61, 124]. Un câmp vectorial gradient poate fi tratat ca un vânt special în datele de navigație (h, W) [20]. Aceasta se pliază cu noțiunea de vânt gravitațional care este componenta $\mathbf{G}^T$ a câmpului gravitațional. Atunci, ecuația generală de mișcare este $v_{ZNP} = u + \mathbf{G}^T$, unde u reprezintă vectorul viteză proprie, cu viteza maximă $\|u\|_h = 1$. Soluția este dată prin intermediul unei metrici Randers a cărei indicator este h -cercul translatat cu $\mathbf{G}^T$.

MAT este tot o problemă de minimizare în raport cu timpul, fiind urmărite cele mai rapide drumuri care pot fi parcurse pe un versant al unui munte, sub efectul gravitației, ținând cont de faptul că a urca este mai obositor decât a coborî [106]. În acest model, componenta transversală a vântului gravitațional (cross-gravity additive), i.e. $\text{Proj}_{u^\perp} \mathbf{G}^T$ (direcția $u^\perp$ fiind ortogonală lui u) este întotdeauna anulată și, prin urmare, nu are niciun impact asupra traseului rezultat. În același timp, componenta longitudinală a vântului gravitațional (along-gravity effect), i.e. $\text{Proj}_u \mathbf{G}^T$ (fiind evident că $\mathbf{G}^T = \text{Proj}_u \mathbf{G}^T + \text{Proj}_{u^\perp} \mathbf{G}^T$) este considerată maximă, în orice direcție u de mișcare, oricare ar fi forța vântului $\|\mathbf{G}^T\|_h$. Acest fapt conduce la ecuația de mișcare $v_{MAT} = u + \text{Proj}_u \mathbf{G}^T$ și de asemenea, implică faptul că vitezele u și v_{MAT} sunt întotdeauna coliniare, ceea ce contrastează cu toate celelalte probleme de navigație descrise în această parte. Soluția este dată prin intermediul metricii Matsumoto a cărei indicator este curba limaçon, în cazul unui model 2-dimensional.

O legătură directă între MAT și ZNP sub influența vântului gravitațional este prezentată în Capitolul 7. Amândouă problemele sunt generalizate și studiate printr-un model al versantului alunecos care include un coeficient de tracțiune transversal (cross-traction) exprimat prin intermediul unui parametru real $\eta \in [0, 1]$. În acest model (slippery slope), componenta longitudinală a vântului gravitațional acționează continuu, cu toată puterea în orice direcție de mișcare, oricare ar fi forța vântului $\|\mathbf{G}^T\|_h$, pe când, componenta laterală este supusă compensării, din cauza tracțiunii descrisă prin η . În acest caz, ecuația generală de mișcare este $v_\eta = u + (1 - \eta)\text{Proj}_{u^\perp} \mathbf{G}^T + \text{Proj}_u \mathbf{G}^T$, iar soluția problemei este dată de o metrica numită slippery slope, aceasta fiind o (α, β) -metrică generală [10].

În Capitolul 8 sunt prezentate și alte modele de navigație optimă, pe panta unui munte. Mai întâi este considerat un model în care, spre deosebire de MAT, componenta transversală a vântului gravitațional este luată în considerare în întregime în ecuația de mișcare, în timp ce componenta longitudinală este ignorată. În acest model, acționat doar de $\text{Proj}_{u^\perp} \mathbf{G}^T$ (cross-

gravity), numit CROSS, viteza rezultantă este $v_{\dagger} = u + \text{Proj}_{u^\perp} \mathbf{G}^T$, iar soluția problemei este dată tot de o metrică (α, β) -generală, (metrica cross-slope) [11]. Apoi este valorificat faptul că fiecare dintre cele două componente ale lui $\mathbf{G}^T$ pot fi reduse parțial prin introducerea unui coeficient de tracțiune, nu doar luate în întregime ca în MAT (doar componenta laterală) sau în CROSS (doar componenta longitudinală). Așadar, prin analogie cu modelul slippery slope din Chapter 7, un alt model denumit slippery cross slope este explorat în Secțiunea 8.3, introducând un alt coeficient de tracțiune $\tilde{\eta} \in [0, 1]$, numit along-traction. Ecuația de mișcare este acum $v_{\tilde{\eta}} = u + \text{Proj}_{u^\perp} \mathbf{G}^T + (1 - \tilde{\eta})\text{Proj}_u \mathbf{G}^T$, iar influența celor două componente ale vântului gravitațional este aici oarecum inversată, comparativ cu modelul slippery slope. Mai mult, problema slippery cross slope (soluția acestuia fiind dată de metrica numită slippery slope cross) leagă direct CROSS și ZNP sub influența vântului gravitațional [12].

Capitolul 9 oferă un model mult mai general de navigație pe panta alunecoasă a muntelui, care unește și extinde toate problemele de navigație dezvoltate în Capitolele 7 și 8. Acum este admisă situația ca ambele componente ale vântului gravitațional, în raport cu direcția de mișcare, să varieze simultan pe intervale complete (ambii coeficienți de tracțiune $\eta, \tilde{\eta} \in [0, 1]$ sunt acum incluși în ecuația generală de mișcare). Acest scenariu reflectă impactul ambelor tracțiuni pe versantul alunecos, ceea ce conferă un sens mult mai larg problemei de navigație optimă, în raport cu timpul pe panta muntelui [13].

Caracteristica comună tuturor problemelor de navigație (studiate în Capitolele 7-9) este că soluțiile optime ale acestora sunt furnizate de metrici Finsler complexe din clasa (α, β) -metricilor generale (așa-numitele $(\eta, \tilde{\eta})$ -slope metrics). Acestea sunt obținute printr-o deformare a metricii riemanniene h , dependentă de direcția de mișcare u , urmată apoi de o translație rigidă, dată de o direcție coliniară vântului gravitațional.