



Universitatea
Transilvania
din Braşov

TEZĂ DE ABILITARE REZUMAT

Titlu: Contribuții la teoria inegalităților
Domeniul: Matematică

Autor: Conf. dr. Nicușor Minculete
Universitatea Transilvania din Braşov

BRAȘOV, 2024

REZUMAT

”*Toți analiștii își petrec jumătate din timp căutând prin literatură inegalitățile pe care doresc să le folosească și pe care nu le pot dovedi.*” – G.H. Hardy

Teoria inegalităților reprezintă un subiect vechi al multor domenii matematice care rămâne încă un domeniu de cercetare atractiv cu multe aplicații. Studiul funcțiilor convexe a ocupat și ocupă un rol central în teoria inegalităților, deoarece funcțiile convexe dezvoltă o serie de inegalități cunoscute.

Rezultatele cercetării prezentate în teză se referă la îmbunătățirea inegalităților clasice obținute prin aplicarea funcțiilor convexe și evidențierea aplicațiilor acestora.

Cartea clasică a lui Hardy, Littlewood și Pólya a jucat un rol important în popularizarea temei funcției convexe.

Două rezultate însemnate legate de funcția convexă sunt *inegalitatea lui Jensen* și *inegalitatea Hermite–Hadamard*. În legătură cu inegalitatea Hermite–Hadamard, mulți matematicieni au lucrat cu mare interes pentru a o generaliza, rafina și extinde pentru diferite clase de funcții, cum ar fi: funcțiile cvasi-convexe, log-convexe, funcțiile r -convexe etc și o aplică pentru medii speciale (media logaritmică, media Stolarsky etc.). Dragomir, Pečarić și Persson au arătat o formă a inegalității Hermite–Hadamard pentru clasa de funcții introduse de Godunova și Levin.

Teza de abilitare se axează pe studiul inegalităților importante din teoria inegalităților și asupra impactului acestora în unele aplicații.

Teza constă dintr-o introducere și cinci capitole. De asemenea, include o listă de notații și o bibliografie cu 260 de referințe.

În prima parte a acestei teze am prezentat realizările științifice și profesionale care conține mai multe rezultate originale, multe dintre acestea sunt publicate în reviste ISI.

Până acum, rezultatele mele științifice obținute au înregistrat un număr total de 212 citări (fără autocitari) conform bazei de date Clarivate.

Capitolul 1 este dedicat contribuțiilor autorului acestei teze la teoria inegalităților dezvoltate cu ajutorul funcțiilor convexe.

În *Secțiunea 1.1* reamintim câteva rezultate referitoare la inegalitatea Hermite–Hadamard date de Hardy, Littlewood și Pólya, Dragomir și Pearce. Motivată de rezultatele date de acești mari matematicieni, am arătat alte inegalități de tipul Hermite–Hadamard și alte inegalități de tipul Fejér.

În *Secțiunea 1.2* și în *Secțiunea 1.3* arătăm inegalități rafinate despre inegalitatea Hermite-Hadamard ponderată și inegalități rafinate despre media logaritmică ponderată.

În *Secțiunea 1.4* studiem clasa de funcții geometrice convexe și vom prezenta câteva proprietăți interesante, inclusiv inegalități fundamentale, inegalități de tip super-multiplicativ și o inegalitate de tipul Jensen-Mercer.

În *Secțiunea 1.5* prezentăm o rafinare a inegalității lui Grüss cu ajutorul inegalității Cauchy-Schwarz pentru variabile aleatorii discrete în cazul finit. Am analizat marginile mai multor indicatori statistici, am dat o formă generalizată a inegalității lui Grüss și totodată am obținut unele inegalități integrale.

Capitolul 2 este dedicat contribuțiilor autorului acestei teze la studiul inegalităților într-un spațiu vectorial înzestrat cu produs scalar (spațiul pre-Hilbert).

În *Secțiunea 2.1*, motivat de rezultatele obținute de Maligranda am demonstrat o îmbunătățire a inegalității lui Maligranda utilizând semi-produsul Tapia.

În *Secțiunea 2.2* obținem noi rezultate referitoare la inegalitatea dată de Harvey și Choi.

În *Secțiunea 2.3*, studiem câteva caracterizări interesante ale spațiilor vectoriale reale înzestrate cu produs scalar exprimate în termeni de distanță unghiulară sau *distanță Clarkson*. Stabilim o familie parametrică de margini superioare pentru distanța unghiulară obișnuită, care servește și ca o caracterizare a unui spațiu vectorial real înzestrat cu produs scalar.

În *Secțiunea 2.4*, arătăm câteva rezultate privind inegalitatea Cauchy-Schwarz și inegalitatea triunghiului, în spații euclidiene. De asemenea, vom prezenta câteva caracterizări ale relației dintre aceste două inegalități.

Capitolul 3 conține contribuțiile autorului acestei teze la studiul altui tip de n -produs scalar. Misiak generalizează conceptul de spațiu vectorial înzestrat cu 2-produs scalar, în anul 1989, la un spațiu vectorial înzestrat cu n -produs scalar, $n \geq 2$.

În *Secțiunea 3.2*, definim n -produsul scalar slab și spațiul vectorial n -iterat înzestrat cu 2-produs scalar, pentru care studiem proprietățile acestora.

În *Secțiunea 3.3*, obținem o reprezentare a spațiului n -iterat înzestrat cu 2-produs scalar, dat în definiția 3.2.4 în termenii k -produsului scalar standard $k \leq n$. Pentru aceasta, utilizăm identitatea lui Dodgson pentru determinanți.

În *Secțiunea 3.4*, dăm câteva aplicații ale 2-produsului scalar n -iterat și generalizăm funcționala Cebășev la n -funcționala Cebășev.

În **Capitolul 4**, prezentăm contribuțiile autorului acestei teze la demonstrarea unor inegalități pentru operatori.

În *Secțiunea 4.1*, scopul este de a studia mai multe inegalități legate de proiecțiile ortogonale. Printre aceste rezultate am stabilit o inegalitate ce caracterizează inegalitatea lui Bessel și vom menționa inegalitatea lui Ostrowski ca o consecință a rezultatelor noastre. De asemenea, prezentăm o îmbunătățire a inegalității dintre raza numerică a unui operator și norma unui operator, dar vom arăta și alte inegalități pentru un operator liniar și mărginit.

În *Secțiunea 4.2*, stabilim noi margini pentru raza euclidiană a unei perechi de operatori liniari mărginiți (B, C) definiți pe un spațiu Hilbert \mathbb{H} .

În lucrarea sa, Popescu introduce conceptul de *rază euclidiană a operatorilor* pentru o pereche de operatori liniari și mărginiți (B, C) definiți pe un spațiu Hilbert \mathbb{H} . Prezenta secțiune își propune să exploreze diverse aplicații care decurg din inegalitatea Heilbronn, în special în contextul unui operator sau a unei perechi de operatori pe un spațiu Hilbert.

În a doua parte a acestei teze de abilitare am prezentat planurile de evoluție și dezvoltare a carierei academice.

Capitolul 5, care este și ultimul, prezintă câteva planuri de viitor privind cariera mea profesională și științifică. Sunt descrise câteva aspecte, pe termen scurt și pe termen lung.

Tehnicile de lucru utilizate în obținerea de rafinări ale unora dintre inegalități analizate sunt următoarele:

- a) pentru o inegalitate de tipul $A \leq B$ studiem existența a două margini m și M astfel încât $0 \leq m \leq B - A \leq M$ și care sunt noile restricții impuse condițiilor care dau inegalitatea inițială (Teorema 1.1.3, Corolarul 1.1.1, Teorema 1.1.6, Propoziția 1.3.1, Teorema 1.4.3 etc)(dacă avem o inegalitate de tipul $A \leq B \leq C$, atunci studiem existența a patru margini m_1, m_2, M_1 și M_2 astfel încât $0 \leq m_1 \leq B - A \leq M_1$ și $0 \leq m_2 \leq C - B \leq M_2$ (Teorema 1.1.5, Teorema 1.1.8, Teorema 1.1.9, Teorema 1.2.1, Teorema 1.2.2, Teorema 1.3.3 etc));
- b) pentru o inegalitate de tipul $A \leq B$ studiem existența unei expresii C astfel încât $A \leq C \leq B$ (Teorema 1.4.5, Teorema 1.4.6 etc).

În concluzie, o scurtă trecere în revistă a rezultatelor obținute, de mine sau în colaborare, în cadrul teoriei inegalităților:

- am arătat câteva inegalități de tipul Fejér (Teorema 1.1.5 și Teorema 1.1.6) publicate în revista *Aust. J. Math. Anal. Appl.*;
- am studiat clasa de funcții geometric convexe dovedind inegalități fundamentale (Propoziția 1.4.1), inegalități de tip super-multiplicativ (Teorema 1.4.1, Corolarul 1.4.1) și o inegalitate de tipul Jensen-Mercer (Teorema 1.4.2), aceste rezultate fiind publicate în *Quaest. Math.*;
- oferim o rafinare al inegalității lui Grüss cu ajutorul inegalității Cauchy-Schwarz pentru variabile aleatorii discrete în cazul finit (Teorema 1.5.2), rezultate pe care le-am publicat în *J. Ineq. Appl.*;
- am estimat inegalitatea triunghiului în spații normate utilizând integrale (Teorema 2.1.1) și semi-produsul Tapia (Teorema 2.1.3), aceste rezultate fiind publicate *J. Ineq. Appl.*;
- am demonstrat o inegalitate ce generalizează inegalitatea lui Harvey și inegalitatea lui Choi (Teorema 2.2.2) și o inegalitate ce generalizează inegalitatea Kechriniotis și Delibasis (Corolarul 2.2.4), rezultate care sunt publicate în *J. Math. Inequal.*;

- am determinat niște inegalități în spații normate care implică faptul că spațiul este înzestrat cu produs scalar (Teorema 2.3.2 și Teorema 2.3.6), aceste rezultate fiind publicate în *Mediterr. J. Math.*;
- prezentăm niște rezultate ce caracterizează legătura dintre inegalitatea Cauchy-Schwarz și inegalitatea triunghiului, în spații euclidiene (Teorema 2.4.1 și Teorema 2.4.2) publicate în *Math. Inequal. Appl.*;
- am studiat alt tip de n -produs scalar, definind n -produsul scalar slab și menționăm unele proprietăți ale acestuia (Teorema 3.2.1, Teorema 3.2.2, Teorema 3.2.4 și Teorema 3.3.1), aceste rezultate fiind publicate în *Ann. Funct. Anal.*;
- oferim câteva inegalități ce se referă la proiecțiile ortogonale (Teorema 4.1.2, Teorema 4.1.4 și Corolarul 4.1.1) și una care ne furnizează inegalitatea lui Ostrowski ca un caz particular (Corolarul 4.1.2), rezultate publicate în *Math. Inequal. Appl.*
- am găsit noi margini pentru raza euclidiană a unei perechi de operatori (Teorema 4.2.1, Teorema 4.2.2 și Teorema 4.2.3). Totodată utilizând inegalitatea Heilbronn deducem unele inegalități referitoare la raza numerică a unui operator sau la norma unui operator (Teorema 4.2.4, Teorema 4.2.5, Teorema 4.2.6 și Teorema 4.2.7), rezultate acceptate spre publicare în *Indian J. Pure Appl. Math.*