Universitatea
Transilvania
din Brașov

ȘCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ
Facultatea: Matematică și Informatică

Drd. Mihaela SMUC

TEZĂ DE DOCTORAT

Contribuții la aproximarea prin operatori liniari și pozitivi

Rezumat

Conducători ştiinţifici
Prof. Univ. Dr. Radu PĂLTĂNEA
Prof. Univ. Dr. dr. h. c. Heiner GONSKA

BRAȘOV, 2022

Drd. Mihaela SMUC

TEZĂ DE DOCTORAT

Contribuții la aproximarea prin operatori liniari și pozitivi

Contributions to approximation by linear positive operators

Domeniul de doctorat: Matematică

Comisia de analiză a tezei:

Preşedinte,	Prof. Univ. Dr. Dorina Răducanu
	Universitatea Transilvania din Brașov
Conducător ştiinţific	Prof. Univ. Dr. Radu Păltănea
	Universitate Transilvania din Brașov
Conducător ştiinţific,	Prof. Univ. Dr. dr. h. c. Heiner Gonska
	Universitatea “Babeș-Bolyai” din Cluj-Napoca
Referent oficial,	Prof dr. hab. Sorin Gheorghe GAL
	Universitatea din Oradea
Referent oficial,	Prof. dr. Ioan RAȘA
	Universitatea Tehnică din Cluj Napoca
Referent oficial	Prof. dr. Octavian AGRATINI
	Universitatea “Babeș-Bolyai ” din Cluj Napoca
Referent oficial	Prof. dr. hab. Ana Maria ACU
	Universitatea “Lucian Blaga ” din Sibiu

Cuprins

Prefaţă

Tema principală a tezei constă în abordarea unor probleme actuale din cadrul teoriei aproximării prin operatori liniari şi pozitivi. Teoria aproximării constituie un domeniu vast al analizei matematice şi are în centrul temelor abordate, aproximarea funcţiilor prin alte funcţii, care sunt mai simple şi mai uşor de calculat.

Bazele acestei teorii au apărut o dată cu teorema clasică a lui Cebîşev a celei mai bune aproximări şi cu teorema de aproximare polinomială a funcţiilor continue a lui Weierstrass de la sfârşitul secolului XIX. Teoria modernă a aproximării funcţiilor continue prin operatori liniari şi pozitivi a fost consolidată o dată cu teorema lui Popoviciu(1950)-Bohman(1952)-Korovkin(1953).

Rezultate reprezentative obţinute ulterior din cadrul acestei teorii au fost obţinute de către G. G. Lorentz, P. L. Butzer, R. DeVore, B. Sendov şi V. Popov, Z. Ditzian, V. Totik, D. D. Stancu, A. Lupaş, F. Altomare, M. Campiti şi mulţi alţii. Temele centrale ale teoriei aproximării sunt: metode diverse de obţinere de noi operatori, estimarea ratei de convergenţă a operatorilor cu ajutorul modulilor de continuitate şi a K–Funcţionale, sau prin formule asimptotice, studiul restului şi reprezentarea acestuia, păstrarea globală a netezimii şi conservarea anumitor proprietăţi, cea mai importantă fiind păstrarea convexităţii.

Obiectivul principal al tezei este obţinerea unor estimări, cu constante optimale, ale ordinului de aproximare folosind moduli de continuitate (simpli şi ponderaţi) şi momentele operatorilor. Lucrarea este structurată în patru capitole, prima parte a fiecărui capitol fiind constituită din noţiuni de bază, respectiv notaţii folosite în cadrul acestuia.

Lucrarea începe prin prezentarea spaţiilor normate de funcţii, definiţia operatorilor liniari şi pozitivi, definiţia modulilor de continuitate şi a modulilor ponderaţi, precum şi prezentarea proprietăţilor acestora.

Primul capitol începe prin prezentarea noţiunilor de bază ale aproximării funcţiilor prin operatori liniari şi pozitivi pe intervale compacte, şi anume: teoremele de convergenţă pentru operatori liniari şi pozitivi, evaluări generale folosind moduli de continuitate de ordinul 1 şi 2 şi teoreme de tip Voronoskaja.

Rezultatele proprii constau în obţinerea unor estimări generale asimptotice folosind moduli de continuitate şi demonstrarea optimalităţii constantelor care apar în aceste estimări.

Capitolul al doilea începe prin prezentarea binecunoscutului operator a lui Bernstein împreună cu o serie de proprietăţi fundamentale ale acestuia. Polinoamele lui Bernstein au ajutat la obţinerea unui procedeu constructiv de demonstrare a teoremei de aproximare a lui Weierstrass. Pentru acest operator, s-au obţinut evaluări ale gradului de aproximare folosind moduli de continuitate, constantele asimptotice obţinute fiind optimale.

Tot în cadrul acestui capitol s-au prezentat şi alţi operatori de tip Bernstein împreună cu proprietăţile lor (operatorii Kantorovich, operatorii Durrmeyer, operatorii Durrmeyer-genuine, operatorii α–Bernstein). Un rezultat propriu îl reprezintă o metodă iterativă prin care s-a reuşit obţinerea unei noi clase de operatori de tip Bernstein, pentru care s-au studiat mai multe proprietăţi.

Capitolul 3 are ca temă centrală aproximarea funcţiilor prin operatori liniari şi pozitivi pe necompact, folosind două tipuri de aproximare: aproximarea uniformă pe intervale compacte şi aproximarea ponderată. Rezultatele proprii constau în estimări generale ale aproximării ponderate pe intervale necompacte folosind moduli de continuitate clasici şi ponderaţi. O atenţie specială este acordată ponderilor 1 şi $\frac{1}{x^2+1}$. Rezultatele obţinute au fost aplicate pentru operatorii Szász–Mirakijan şi operatorii Baskakov.

În finalul capitolului, se prezintă o modificare de tip Chlodovsky pentru operatorii α–Bernstein. Aceasta reprezintă o metodă pentru obţinerea de noi operatori pentru aproximarea pe necompact.

Capitolul 4 prezintă noţiuni generale privind semigrupurile de operatori. Prima secţiune conţine definiţii şi rezultate de bază ale aproximării semigrupurilor de operatori. Tot aici s-au enunţat mai multe variante cantitative ale teoremei lui Trotter. Rezultatele proprii obţinute constau în estimări cantitative pentru limita semigrupurilor de operatori liniari şi pozitivi, acestea fiind aplicate în cazul operatorilor de tip Durrmeyer. Rezultatele obţinute pentru cazul unidimensional a semigrupurilor generate de operatorul Bernstein au fost extinse şi pentru cazul multidimensional a semigrupurilor generate de operatorul Bernstein multidimensional.

Bibliografia cuprinde 129 lucrări care sunt citate pe parcursul tezei în cazul rezultatelor preluate şi prezentate în lucrare.

În această lucrare sunt prezentate rezultatele originale ale autorului obţinute pe parcursul elaborării tezei. Ele se regăsesc în cele şase articole ale autorului, cinci publicate şi unul în curs de publicare, dintre care două au fost publicate în revistele Results Mathematics [95] şi Semigroup Forum [96], care au coeficent SRI de peste 0,5. Lucrările publicate au primit 6 citări în reviste ISI. Autorul a participat la urmatoarele conferinte internationale: Romanian – German Seminar on Approximation Theory and Applications "RoGer 2017" (Oradea) şi "RoGer 2019" (Cluj Napoca), şi Mathematics and Computer Science "MACOS 2018"(Braşov). Toate rezultatele preluate din literatură sunt însoţite de citare şi nu au demonstraţii. În cadrul fiecărui capitol sunt indicate lucrările unde au fost incluse rezultatele originale ale autorului. Lucrările originale formeaza in întregime conţinutul secţiunilor 1.2, 2.3, 3.2, 3.3.2, 4.4, 4.5 şi parţial al secţiunilor 2.1.2, 3.3, 3.5.

În încheiere, aş dori să-mi exprim profunda recunoştinţă şi preţuire domnului Prof. Dr. Univ. Radu Păltănea şi domnului Prof. Dr. dr. h. c. Heiner Gonska, conducătorilor ştiinţifici ai acestei Teze, pentru încrederea acordată, pentru sfaturile şi încurajările pe care mi le-au oferit, pentru timpul şi răbdarea pe care au avut-o întotdeauna în discuţiile extrem de utile de care am beneficiat pe toată perioada activităţii mele de doctorand.

Preliminarii

În cele ce urmează vom introduce definiţiile si noţiunile de bază pe care le-am folosit în studiul operatorilor de aproximare.

Începem prin introducerea noţiunii de operator liniar şi pozitiv precum urmează:

Definiţie 0.0.1. *Un operator L definit pe un spaţiu liniar de funcţii V se numeşte liniar dacă*

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g),\ (\forall) f, g \in V \text{ şi } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Operatorul L este pozitiv dacă şi numai dacă

$$L(f) \geq 0$$

pentru orice $f \in V$ şi $f \geq 0$.

În ceea ce urmează vom considera următoarele notaţii pe care le vom folosi pe tot parcursul lucrării:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\},\ &\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \\
\Pi_n -&\text{ mulţimea polinoamelor de grad mai mic sau egal cu n, unde } n \in \mathbb{N}_0 \\
[a] -&\text{ partea întreagă a lui a} \\
\{a\} -&\text{ partea fracţionară a lui a} \\
e_n -&\text{ funcţia } e_n(t) = t^n,\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

şi următoarele convenţii:

$$\begin{aligned}
0^0 &= 1 \\
0 \cdot \infty &= 0 \\
\sum_{i=r}^{s} a_i &= 0,\ \prod_{i=r}^{s} a_i = 1 \text{ dacă } r > s \\
\binom{n}{k} &= 0 \text{ pentru } k \geq n
\end{aligned}$$

Restricţia unei funcţii $f : I \to \mathbb{R}$ la o mulţime $J \subset I$ se notează tot cu f.
Definim pe intervalul real I următoarele spaţii:

- $\mathcal{F}(I)$ - spaţiul funcţiilor reale definite pe I
- $\mathcal{F}_b(I)$ - spaţiul funcţiilor reale local mărginite definite pe I
- $B(I)$ - spaţiul funcţiilor reale mărginite definite pe I
- $C(I)$ - spaţiul funcţiilor reale continue definite pe I

- $C_b(I)$ - spaţiul funcţiilor reale continue local mărginite definite pe I
- $\mathcal{D}(I)$ - spaţiul funcţiilor reale continue şi diferenţiabile definite pe I
- $\mathcal{L}_\mu(I)$ - spaţiul funcţiilor reale integrabile de măsură μ definite pe I

Pentru orice funcţie $f \in B(I)$ notăm norma supremum ca fiind:

$$||f|| := \sup_{x \in I} |f(x)|$$

Funcţiile test $e_i(x) = x^i,\ x \in I$.
Diferenţa divizată a funcţiei $f \in \mathcal{F}(I)$ în nodurile $x_1, \ldots, x_k$ este

$$[f; x_1, \ldots, x_k] := \sum_{i=1}^{k} \left(\prod_{1 \le j \le k\ j \ne i} (x_i - x_j)^{-1} \right) f(x_i).$$

Diferenţa finită de ordinul k pentru funcţia $f \in \mathcal{F}(I)$ este

$$\Delta_h^k f(x) := \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} f(x + jh),\ x \in I,\ x + kh \in I,\ h > 0$$

Definiţie 0.0.2. *[98] Funcţia $f \in \mathcal{F}(I)$ se numeşte convexă de ordin $k \ge -1$ dacă $[f; x_1, \ldots, x_{k+2}] \ge 0$ pentru orice $x_1, \ldots x_{k+2}$ distincte pe I.*

Deci f este convexă de ordin -1, dacă este pozitivă, este convexă de ordin 0, dacă este crescătoare şi este convexă de ordin 1 dacă este convexă uzual.

Definiţie 0.0.3. *Fie V este un subspaţiu liniar a lui $\mathcal{F}(I)$ şi $k \ge -1$. Operatorul liniar $L : V \to \mathcal{F}(I)$ se numeşte convex de ordin k dacă pentru orice funcţie f convexă de ordinul k, $L(f)$ este convex de ordin k.*

Pentru oricare $L : V \to \mathcal{F}(I)$ operator liniar şi pozitiv, $V \subset \mathcal{F}(I)$ vom scrie $L(f)(x) = L(f; x)$. Există două tipuri principale de operatori liniari şi pozitivi:

1) Operatori integrali:

$$L : C(I) \to \mathcal{F}(I) \quad L(f; x) := \int_I f(t) K(t, x) dt,\ f \in C(I),\ x \in I,$$

dacă I este compact sau integrala este convergentă, iar $K \ge 0$ este o funcţie continuă global.

2) Operatori discreţi:

$$L(f; x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i) \psi_i(x), \quad f \in \mathcal{F}(I),\ x \in I,\ \text{unde } \xi_i \in I,\ \psi_i \in \mathcal{F}(I),\ \psi_i \ge 0,$$

iar seria este convergentă. În caz particular avem operatorii definiţi prin sume finite.

Definiţie 0.0.4. *Fie $L : V \to \mathbb{R}$ un operator liniar pozitiv, unde V este un subspaţiu liniar a lui $\mathcal{F}(I)$. Fie $x \in I$ fixat. Numim momentele operatorului L centrate în x:*

$$m_j(x) := L\left((e_1 - x e_0)^j ; x \right), \quad j = 0, 1, \ldots$$

Gradul de aproximare prin operatorii liniari şi pozitivi depinde de proprietăţile de netezime ale funcţiilor. În aproximările gradului de aproximare, instrumente pentru măsurarea netezimii funcţiilor le reprezintă modulii de continuitate.

Definiţie 0.0.5. *[5] Fie $f \in B(I)$, unde I este un interval. Aplicaţia $\omega(f, \bullet) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,*

$$\omega(f; h) := \sup \{|f(x) - f(y)|,\ x, y \in I,\ |x - y| \leq h\rangle$$

se numeşte modulul de continuitate de ordinul 1 al lui f.

Teoremă 0.0.1. *[5](Proprietăţile modulului de continuitate de ordinul unu) Fie $f \in B(I)$. Atunci $\omega(f, \cdot)$ are proprietăţile:*

1) $\omega(f, \cdot) \geq 0$.

2) $\omega(f, 0) = 0$.

3) $\omega(f, \cdot)$ este crescătoare.

4) $\omega(f, \cdot)$ este subaditivă.

5) $\omega(f, \cdot)$ este uniform continuă, dacă $f \in C_b(I) \cap B(I)$.

6) $(\forall)h \geq 0,\ (\forall)n \in \mathbb{N},\ \omega(f, nh) \leq n\omega(f, h)$.

7) $(\forall)h \geq 0, (\forall)\lambda > 0,\ \ \omega(f, \lambda h) \leq (1 + \lambda)\omega(f, h)$.

8) $(\forall)h \geq 0,\ (\forall)s \geq 1,\ |f(x) - f(y)| \leq (1 + h^{-s}|x - y|^s)\omega(f, h)$.

9) $(\forall)f_1,\ f_2 \in B(I),\ \omega(f_1 f_2; h) \leq ||f_1||\omega(f_2; h) + ||f_2||\omega(f_1; h)$.

Definiţie 0.0.6. *[87] Fie $V \subset \mathcal{F}(I)$ un subspaţiu liniar astfel încât $\prod_k \subset V,\ k \in \mathbb{N}$. O funcţie $\Omega_k : V \times [0, \infty) \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ se numeşte modul de continuitate de ordin k pe V, dacă îndeplineşte următoarele condiţii:*

1) $\Omega_k(f, h_1) \leq \Omega_k(f, h_2),\ f \in V,\ \ 0 \leq h_1 < h_2$

2) $\Omega_k(f + p, h) = \Omega(f, h),\ \ f \in V,\ p \in \prod_{k-1},\ h > 0$

3) $\Omega_k(0, h) = 0,\ h > 0$

Spunem că modul Ω_k este normat dacă există $M > 0$ astfel încât $\Omega_k(e_k, h) \leq Mh^k,\ (\forall)h > 0$.

Moduli uzuali de ordinul $k \geq 1$ sunt daţi de formula:

$$\omega_k(f, h) = \sup \left\{|\Delta_\rho^k f(x)|,\ x \in I, x + k\rho \in I,\ \rho \leq h\right\},$$

unde $f \in B(I),\ h > 0$.
Modulul ω_1 se mai notează şi simplu cu ω.

O pondere admisibilă pe intervalul $[0, 1]$ este o funcţie $\varphi \in C[0, 1]$ astfel încât $\varphi(x) > 0$, $x \in (0, 1)$.

Modulul de ordinul 1 ponderat a lui $f \in B[0, 1]$ este dat de

$$\omega_2^\varphi(f, h) = \sup \left\{|f(u) - f(v)|,\ u, v \in [0, 1],\ |v - u| \leq h\varphi\left(\frac{u + v}{2}\right)\right\},$$

iar modulul de ordinul 2 ponderat a lui $f \in B[0, 1]$ este dat de următoarea formulă:

$$\omega_2^\varphi(f, h) = \sup \{|f(x - \rho) - 2f(x) + f(x + \rho)|,\ x \pm \rho \in [0, 1],\ |\rho| \leq h\varphi(x),\ h > 0\}$$

Dacă $\varphi(x) = \sqrt{x(1 - x)},\ x \in [0, 1]$ obţinem modulii de ordinul 1 şi 2 a lui Ditzian–Totik şi pentru $\varphi(x) = 1$ se obţin modulii clasici de ordin 1 şi 2.

Capitolul 1

Operatori de aproximare pentru intervale compacte

1.1 Aproximarea funcţiilor prin operatori liniari şi pozitivi

1.1.1 Teoreme de convergenţă

Teorema clasică de aproximare a funcţiilor continue este următoarea:

Teoremă 1.1.1. *[10][Weierstrass–1885] Pentru orice funcţie $f(x)$ continuă pe un interval $[a,b]$ şi pentru oricare $\epsilon > 0$ există un polinom $P(x)$ care aproximează $f(x)$ uniform cu o eroare mai mică ca ϵ:*

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, \; x \in [a,b]. \tag{1.1}$$

Pentru aproximarea funcţiilor continue un instrument de bază îl reprezintă operatorii liniari şi pozitivi.

Fundamentul teoriei aproximării prin şiruri de operatori liniari şi pozitivi a fost pus de T. Popoviciu [100], H. Bohman [21] şi P. P. Korovkin [76].

Teoremă 1.1.2 (T. Popoviciu–1950)**.** *[100] Fie un şir de operatori liniari şi pozitivi de forma*

$$L_n(f;x) = \sum_{i=1}^{m_n} f(\xi_{n,i})\, \psi_{n,i}(x), \; f \in C[a,b], \; x \in [a,b]$$

unde $\xi_{n,i} \in [a,b]$ şi $\psi_{n,i}$ sunt polinoame pozitive. Presupunem că

$$L_n(e_0;x) = e_0$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} L_n\left((e_1 - xe_0)^2, x\right) = 0 \; uniform \text{ în raport cu } x \in [a,b]$$

Atunci avem

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f \; uniform \text{ pe } [a,b], \; \forall f \in C[a,b].$$

Teoremă 1.1.3 (P. P. Korovkin–1953)**.** *[76] Fie un şir de operatori liniari şi pozitivi $(L_n)_n$, $L_n : V \to \mathcal{F}[a,b]$, unde V este un subspaţiu liniar a lui $\mathcal{F}[a,b]$. Presupunem că $\phi_0, \; \phi_1, \; \phi_2 \in V \cap C[a,b]$ formează un sistem Cebîşev pe intervalul $[a,b]$. Dacă avem:*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\phi_i) = \phi_i \; uniform \text{ pentru } i = 0,1,2$$

atunci
$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f \ \text{uniform pentru oricare} \ f \in V \cap C[a,b].$$

Teorema lui Bohman este un caz particular al teoremei lui Korovkin în care apar funcţiile $\theta_0 = e_0,\ \theta_1 = e_1,\ \theta_2 = e_2$, iar operatorii sunt şi ei de o formă particulară.

Pentru aproximarea simultană, aproximarea funcţiilor împreună cu derivatele lor prin operatori liniari şi pozitivi, o proprietate importantă o reprezintă convexitatea de ordin superior a operatorilor.

1.1.2 Evaluări generale cu moduli de continuitate ω_1 şi ω_2

Un mod simplu de a estima gradul de aproximare cu operatori liniari şi pozitivi este cu ajutorul modulului de continuitate de ordinul I. Astfel de rezultate au fost obţinute în lucrările lui O. Shisha şi B. Mond[109] şi a lui B. Mond[82].

Teoremă 1.1.4. *[82] Fie $L : V \to \mathcal{F}(I)$ un operator liniar şi pozitiv, unde I este compact şi V este un subspaţiu liniar a lui $\mathcal{F}(I)$ astfel încât $e_j \in V,\ j \in 0, 1, 2$. Pentru orice $g \in V$, $y \in I$ şi $h > 0$ avem*
$$\begin{aligned}|L(g,y) - g(y)| \leq & |g(y)||L(e_0,y) - 1| \\ & + \left(L(e_0,y) + \frac{1}{h^2} L((e_1 - ye_0)^2, y)\right) \cdot \omega_1(g,h).\end{aligned} \tag{1.2}$$

Următoarele estimări date de către F. Altomare şi M. Campiti [10] au la bază rezultatul stabilit de O. Shisha şi B. Mond în [109].

Teoremă 1.1.5. *[109] Fie $L : C(I) \to \mathcal{F}(I)$ un operator liniar şi pozitiv. Au loc următoarele:*

i) Dacă $f \in C_B(I)$ atunci $(\forall)x \in I,\ (\forall)h > 0$
$$\begin{aligned}|L(f;x) - f(x)| \leq & |f(x)| \cdot |L(e_0;x) - 1| \\ & + \left(L(e_0;x) + h^{-1}\sqrt{L(e_0;x) \cdot L((e_1 - xe_0)^2;x)}\right)\omega_1(f;h).\end{aligned}$$

ii) Dacă f este derivabilă pe I şi $f' \in C_B(I)$ atunci $(\forall)x \in I$ şi $(\forall)h > 0$
$$\begin{aligned}|L(f;x) - f(x)| \leq & |f(x)| \cdot |L(e_0;x) - 1| + |f'(x)| \cdot |L(e_1;x) - xL(e_0;x)| \\ & + \sqrt{L((e_1 - e_0x)^2;x)}\left(\sqrt{L(e_0;x)} + h^{-1}\sqrt{L((e_1 - xe_0)^2;x)}\right)\omega_1(f';h).\end{aligned}$$

În categoria modulelelor de ordin 2 putem include modulul $(f,h) \to h\omega_1(f',h)$, $f \in \mathcal{D}(I)$. Coeficientul h din faţa modulului de ordinul 1 al derivatei este necesar datorită condiţiei de normalizare.

O estimare dată cu acest modul se poate vedea în teorema ce urmează:

Teoremă 1.1.6. *[87] Fie $L : V \to \mathcal{F}(I)$, un operator liniar şi pozitiv, unde V este un subspaţiu a lui $\mathcal{F}(I)$. Presupunem că $L(e_0;x) = e_0$ şi $L(e_1;x) = e_1$. Avem*
$$|L(f,x) - f(x)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{L\left((e_1 - xe_0)^2, x\right)} \cdot \omega_1\left(f', 2\sqrt{L\left((e_1 - xe_0)^2, x\right)}\right).$$

Estimări ale erorii care implică modulul de netezime de ordinul 2 au fost obţinute de către H.H. Gonska [59] în următoarea teoremă.

Teoremă 1.1.7. *[59] Fie $a \leq c < d \leq b$ şi $L : C[a,b] \to B[c,d]$ un operator liniar şi pozitiv. Pentru orice $f \in C[a,b]$, $x \in [c,d]$ şi $\delta > 0$ are loc următoare inegalitate:*

$$\begin{aligned}
&|L(f;x) - f(x)| \\
&\leq \left[\frac{3}{2}(\|L\|+1) + L\left((e_1 - xe_0)^2; x\right) \max\left\{\delta^{-2}; (b-a)^{-2}\right\}\right] \cdot \omega_2(f;\delta) \\
&+ 2|L(e_1 - xe_0; x)| \cdot \max\left\{\delta^{-1}, (b-a)^{-1}\right\} \cdot \omega_1(f;\delta) \\
&+ |L(e_0;x) - 1| \left(\|f\| + \omega_1(f;\delta)\right).
\end{aligned}$$

R. Păltănea [91] a obţinut un rezultat îmbunătăţit cu constante optimale, care exprimat în termeni de funcţionale este următorul:

Teoremă 1.1.8. *Fie I un interval arbitrar şi fie $F : C(I) \to \mathbb{R}$ o funcţională liniară pozitivă. Fie $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$. Atunci are loc*

$$\begin{aligned}
|F(f) - f(x)| \quad \leq \quad & |f(x)| \cdot |F(e_0) - 1| + |F(e_1 - xe_0)| h^{-1} \omega_1(f,h) \\
& + \Big(F(e_0) + \frac{1}{2} h^{-s} F(|e_1 - xe_0|^s)\Big) \omega_2(f,h), \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

pentru orice $f \in C_B(I)$, $x \in I$ şi $h > 0$ astfel încât $h \preceq \frac{1}{2} lungime(I)$.

Aici simbolul $h \preceq \frac{1}{2} lungime(I)$ înseamnă $h \leq \frac{1}{2} lungime(I)$ dacă I este compact şi $h < \frac{1}{2} lungime(I)$ dacă I nu este compact.

1.1.3 Rezultate asimptotice - Teoreme de tip Voronovskaja şi teoreme de saturaţie

Considerăm cel mai mic majorant concav a lui $\omega(f,\cdot)$ dat de formula următoare

$$\tilde{\omega}_1(f,\epsilon) = \begin{cases} \sup\left\{\frac{(\epsilon - x)\omega(f,y) + (y-\epsilon)\omega(f,x)}{y-x} : 0 \leq x \leq \epsilon \leq y \leq b-a \ x \neq y\right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{dacă } 0 \leq \epsilon \leq b-a \\ \tilde{\omega}(f, b-a) = \omega(f, b-a) \quad \text{dacă } \epsilon > b-a \end{cases}$$

Un rezultat cantitativ general de tip Voronokaja este următorul:

Teoremă 1.1.9. *[55] Fie $L : C[0,1] \to C[0,1]$ un operator liniar şi pozitiv astfel încât $L(e_j;x) = e_j$ pentru $j = 0,1$. Dacă $f \in C^2[0,1]$ şi $x \in [0,1]$ atunci*

$$\begin{aligned}
\left| L(f;x) - f(x) - \frac{1}{2} \cdot f''(x) L\left((e_1 - x)^2; x\right) \right| \leq & \frac{1}{2} L\left((e_1 - x)^2; x\right) \\
& \cdot \tilde{\omega}\left(f''; \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{L\left((e_1-x)^4;x\right)}{L\left((e_1-x)^2;x\right)}}\right).
\end{aligned}$$

O teoremă generală de tip asimptotic este următoarea:

Teoremă 1.1.10. *[78] Fie $q \in \mathbb{N}$ dat, $f \in C^q[0,1]$ şi $L_n : C[0,1] \to C[0,1]$ un şir de operatori liniari şi pozitivi astfel încât*

$$\begin{aligned}
L_n(e_0;x) &= 1, && x \in [0,1] \\
\lim_{n\to\infty} \frac{L_n\left((e_1 - x)^{q+2j}; x\right)}{L_n\left((e_1-x)^q; x\right)} &= 0, && \textit{pentru cel puţin un } \ j \in \{1,2,\cdots\}
\end{aligned}$$

Atunci

$$\frac{1}{L_n\left((e_1-x)^q;x\right)}\left\{L_(f;x)-f(x)-\sum_{r=1}^{q}L_n\left((e_1-x)^r;x\right)\cdot\frac{f^{(n)}(x)}{r!}\right\}\to 0$$

când $n\to\infty$.

O formă cantitativă a teoremei precedente este următoarea:

Corolar 1.1.1. *[55] Fie* $q\in\mathbb{N}_0,\ f\in C^q[0,1]$ *şi* $L:C[0,1]\to C[0,1]$ *un operator liniar şi pozitiv. Atunci*

$$\left|L(f;x)-\sum_{r=0}^{q}L\left((e_1-x)^r;x\right)\frac{f^{(r)}(x)}{r!}\right|\le\frac{L\left(|e_1-x|^q;x\right)}{q!}\cdot\tilde{\omega}_1\left(f^{(q)};\frac{1}{q+1}\cdot\frac{L\left(|e_1-x|^{q+1};x\right)}{L\left(|e_1-x|^q;x\right)}\right).$$

În finalul acestei secţiuni, menţionăm un rezultat de comportare asimptotică care utilizează un modul ponderat.

Vom considera în ceea ce urmează ponderea $\varphi(x)=\sqrt{x(1-x)},\ x\in[0,1]$. Fie $\Psi(x)=x(1-x),\ x\in[0,1]$. Fie $\mu\in[0,1]$. Definim

$$\begin{aligned}&\omega_2^{\varphi,\mu}(f,h)\\&=\sup\left\{\Psi^{1-\mu}(x)|f(x-\varphi)-2f(x)+f(x+\varphi)|,\ x\pm\rho\in[0,1],\ |\rho|\le h\rho^{\mu}(x)\right\}\end{aligned}$$

unde $f\in B[0,1],\ h>0$.

Teoremă 1.1.11. *[88] Fie* $\Psi(x)=x(1-x),\ x\in[0,1]$ *şi fie* $(L_n)_n$ *un şir de operatori liniari şi pozitivi* $L_n:B[0,1]\to\mathbb{R}^{[0,1]}$ *care satisface următoarele condiţii*

i) $L_n(e_i)=e_i,\ i=0,1$

ii) există un şir $(\alpha_n)_n$ *astfel încât* $\alpha_n>0,\ \lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ *şi*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n\left((e_1-xe_0)^2,x\right)}{\alpha_n\Psi(x)}=1\ uniform\ \hat{\imath}n\ raport\ cu\ x\in(0,1)$$

iii) $L_n\left((e_1-xe_0)^4,x\right)=o\left(L_n\left((e_1-xe_0)^2,x\right)\right)(n\to\infty)$ *uniform în raport cu* $x\in[0,1]$.

Atunci pentru orice $\mu\in[0,1]$ *şi orice* $f\in C^2[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|]|L_nf-f||}{\omega_2^{\varphi,\mu}(f,\sqrt{\alpha_n}}=\frac{1}{2}.$$

1.2 Evaluări asimptotice cu constante optimale ale operatorilor liniari şi pozitivi în raport cu moduli de continuitate de ordinul 1 şi 2

În această secţiune vom urmări să dăm o estimare generală a dezvoltărilor asimptotice folosind modul de continuitate şi de a puncta optimalitatea constantelor care apar în aceste estimări. Rezultate din această secţiune sunt cuprinse în lucrarea [95].

Pentru simplificare, în locul unui şir de operatori liniari şi pozitivi este suficient să considerăm un singur astfel de operator L. Vom prezenta două tipuri de estimări. Prima estimare este pentru cantitatea de forma:

$$L\Big(f - \sum_{j=0}^{q} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(e_1 - x)^j, x\Big) = L(f,x) - \sum_{j=0}^{q} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} L((e_1 - x)^j, x),$$

unde q este par.

A doua este pentru o cantitate de forma:

$$L\Big(\frac{k!}{(e_1 - x)^k} \cdot \Big(f - \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(e_1 - x)^j\Big), x\Big),$$

pentru orice k natural, unde funcţia la care aplicăm operatorul este extinsă prin continuitate în punctul x.

În subcapitolul următor vom exemplifica această teorie pentru operatorii de tip Bernstein, pentru care avem oportunitatea să comparăm rezultatele cu cele obţinute precedent.

1.2.1 Un prim tip de estimare asimptotică folosind modulul de continuitate

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval arbitrar.

Fie $L : C(I) \to \mathcal{F}(I)$ un operator liniar şi pozitiv. Pentru $x \in I$ şi $j \in \mathbb{N}_0$ considerăm

$$m_j(x) = L((e_1 - xe_0)^j, x),$$
$$M_j(x) = L(|e_1 - xe_0|^j, x).$$

Atunci $M_{2k}(x) = m_{2k}(x)$, pentru $k \in \mathbb{N}$.

Teoremă 1.2.1. *Fie $L : C(I) \to \mathcal{F}(I)$ un operator liniar şi pozitiv, unde I este un interval. Pentru $k \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{N}$, $f \in C_B^k(I)$, $x \in I$ şi $h > 0$ are loc*

$$\Big|L(f,x) - \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} m_j(x)\Big| \le \Big(\frac{1}{k!} M_k(x) + h^{-s} \frac{s!}{(k+s)!} M_{k+s}(x)\Big)\omega_1(f^{(k)}, h). \quad (1.4)$$

Pentru $s = 1$ şi fiecare $k \in \mathbb{N}_0$ constantele date în (1.4) sunt optimale, adică dacă există două constante $A > 0$, $B > 0$, astfel încât să existe următoarea inegalitate:

$$\Big|L(f)(x) - \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} m_j(x)\Big| \le \Big(AM_k(x) + Bh^{-1}M_{k+1}(x)\Big)\omega_1(f^{(k)}, h) \quad (1.5)$$

pentru orice operator liniar şi pozitiv $L : C(I) \to \mathcal{F}(I)$, $(\forall) f \in C_B^k(I)$, $(\forall) x \in I$ şi $(\forall) h > 0$, atunci $A \ge \frac{1}{k!}$ şi $B \ge \frac{1}{(k+1)!}$.

Corolar 1.2.1. *Fie $L : C(I) \to \mathcal{F}(I)$ un operator liniar şi pozitiv. Fie $x \in I$ şi $k \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{N}$. Presupunem că $M_j(x) \neq 0$, pentru $j = k, k+s$. Atunci pentru orice funcţie $f \in C_B^k(I)$ are loc*

$$\Big|L(f,x) - \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} m_j(x)\Big| \le 2\frac{M_k(x)}{k!}\omega_1\left(f^{(k)}, \sqrt[s]{\frac{s!k!M_{k+s}(x)}{(k+s)!M_k(x)}}\right). \quad (1.6)$$

Corolarul 1.2.1 a fost obţinut pentru operatorii Bernstein pentru $s = 1$ în [2].

1.2.2 Primul tip de estimări asimptotice folosind moduli de continuitate de ordinul unu şi doi

Vom folosi următoarea lemă ajutătoare, care constituie o variantă la rezultatul dat în [87], Lema 1.1.1.

Lemă 1.2.1. *Fie o funcţională liniară şi pozitivă $F : C(I) \to \mathbb{R}$.*
i) Presupunem că există $x \in I$ şi $\sigma \in C(I)$, cu următoarele proprietăţi

a) $\sigma(x) = 0$ şi $\sigma(t) > 0$, pentru orice $t \in I \setminus \{x\}$;

b) $F(\sigma) = 0$.

Atunci $F(f) = F(e_0)f(x)$, $f \in C(I)$.
ii) Dacă $F(e_0) = 0$, atunci $F = 0$.

Rezultatul principal al acestui subcapitol este următoarea teoremă:

Teoremă 1.2.2. *Fie I un interval real. Fie $L : C(I) \to \mathcal{F}(I)$ un operator liniar pozitiv. Fie $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$. Fie $k \in \mathbb{N}_0$. Pentru orice $f \in C_B^{2k}(I)$, $x \in I$ şi $h > 0$ astfel încât lungime$(I) \geq 2h$ are loc:*

$$\begin{aligned}\Big|L(f,x) - \sum_{j=0}^{2k} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} m_j(x)\Big| \leq & \frac{|m_{2k+1}(x)|}{(2k+1)!} h^{-1}\omega_1(f^{2k)}, h) \\ & + \Big(\frac{m_{2k}(x)}{(2k)!} + h^{-s}\frac{s!}{2} \cdot \frac{M_{2k+s}(x)}{(2k+s)!}\Big)\omega_2(f^{(2k)}, h). \qquad (1.7)\end{aligned}$$

Pentru $s = 2$ şi orice $k \in \mathbb{N}_0$ constantele date de relaţia (1.7) sunt optimale, adică dacă există trei constane $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ astfel încât următoarea inegalitate:

$$\begin{aligned}\Big|L(f,x) - \sum_{j=0}^{2k} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} m_j(x)\Big| \leq & A|m_{2k+1}(x)|h^{-1}\omega_1(f^{2k)}, h) \\ & + \Big(Bm_{2k}(x) + Ch^{-2}m_{2k+2}(x)\Big)\omega_2(f^{(2k)}, h) \qquad (1.8)\end{aligned}$$

este adevărată pentru orice operator liniar şi pozitiv $L : C(I) \to \mathcal{F}(I)$, $(\forall)f \in C_B^{2k}(I)$, $(\forall)x \in I$ şi $(\forall)h > 0$ astfel încât lungime$(I) \geq 2h$, atunci

$$A \geq \frac{1}{(2k+1)!},\ B \geq \frac{1}{(2k)!},\ C \geq \frac{1}{(2k+2)!}. \qquad (1.9)$$

1.2.3 Un al doilea tip de estimări asimptotice

Dacă $f \in C^k(I)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $x \in I$, atunci funcţia

$$\Delta_x^k(f)(t) = \begin{cases} \frac{k!}{(t-x)^k}\Big(f(t) - \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(t-x)^j\Big), & t \in I,\ t \neq x \\ 0, & t = x \end{cases} \qquad (1.10)$$

este continuă pe I.

Obiectivul acestei secţiuni este de a da estimări pentru $L(\Delta_x^k(f), x)$, când $L : C(I) \to C(I)$ este un operator liniar şi pozitiv.

Pentru L şi $k \in \mathbb{N}$ definim următorul operator $V_{L,k} : C_B(I) \to \mathcal{F}(I)$:

$$V_{L,k}(g,x) := L\left(\theta_x^k(g), x\right)\left(g \in C_B(I),\ x \in I\right), \qquad (1.11)$$

unde funcţia $\theta_x^k(g) \in C_B(I)$ este dată de relaţia

$$\theta_x^k(g)(t) = \begin{cases} \frac{k}{(t-x)^k} \int_x^t (t-u)^{k-1} g(u)\mathrm{d}u, & t \in I,\ t \neq x \\ g(x), & t = x \end{cases} \tag{1.12}$$

Lemă 1.2.2. *Pentru orice operator liniar şi pozitiv $L : C(I) \to C(I)$ şi orice $k \in \mathbb{N}$, operatorul $V_{L,k}$ este bine definit, liniar şi pozitiv.*

Lemă 1.2.3. *Dacă $L : C(I) \to C(I)$ este un operator liniar şi pozitiv, atunci*

$$L\left(\Delta_x^k(f), x\right) = V_{L,k}(f^{(k)}, x) - L(e_0, x) f^{(k)}(x), \tag{1.13}$$

pentru $f \in C^k(I)$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in I$.

Lemă 1.2.4. *Pentru orice operator liniar şi pozitiv $L : C(I) \to C(I)$, $k \in \mathbb{N}$ şi orice $s \in \mathbb{N}_0$ avem*

$$V_{L,k}(|e_1 - x|^s, x) = \frac{s!k!}{(k+s)!} L(|e_1 - x|^s, x). \tag{1.14}$$

Teoremă 1.2.3. *Fie $L : C(I) \to C(I)$ un operator liniar şi pozitiv, $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Pentru $f \in C^k(I)$, $x \in I$ şi $h > 0$ avem:*

$$\left|L\left(\Delta_x^k(f), x\right)\right| \leq \Big(L(e_0, x) + \frac{s!k!}{(k+s)!} h^{-s} L(|e_1 - x|^s)\Big) \omega_1(f^{(k)}, h). \tag{1.15}$$

Pentru $s = 1$ şi orice $k \in \mathbb{N}_0$ constantele date de relaţia (1.15) sunt optimale, adică dacă există două constante $A > 0$, $B > 0$, astfel încât inegalitatea:

$$|L(\Delta_x^k(f), x)| \leq \Big(AL(e_0, x) + Bh^{-1} L(|e_1 - x|, x)\Big) \omega_1(f^{(k)}, h). \tag{1.16}$$

este adevărată pentru orice operator liniar şi pozitiv $L : C(I) \to C(I)$, $(\forall) f \in C^k(I)$, $(\forall) x \in I$ şi $(\forall) h > 0$ astfel încât lungime$(I) \geq 2h$, atunci

$$A \geq 1,\ B \geq \frac{1}{k+1}. \tag{1.17}$$

Teoremă 1.2.4. *Pentru $L : C(I) \to C(I)$, un operator liniar şi pozitiv, $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$, $k \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^k(I)$, $x \in I$ şi $h > 0$ astfel încât lungime$(I) \geq 2h$ are loc:*

$$\begin{aligned} \left|L(\Delta_x^k(f), x)\right| &\leq \frac{1}{k+1} |L(e_1 - x, x)| h^{-1} \omega_1(f^{(k)}, h) \\ &\quad + \Big(L(e_0, x) + \frac{s!k!}{2(k+s)!} h^{-s} L(|e_1 - x|^s, x)\Big) \omega_2(f^{(k)}, h). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Pentru $s = 2$ şi fiecare $k \in \mathbb{N}_0$ constantele date în relaţia (1.18) sunt optimale, adică dacă există trei constante $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ astfel încât următoarea inegalitate:

$$\begin{aligned} \left|L(\Delta_x^k(f), x)\right| &\leq A |L(e_1 - x, x)| h^{-1} \omega_1(f^{(k)}, h) \\ &\quad + \Big(BL(e_0, x) + Ch^{-2} L((e_1 - x)^2, x)\Big) \omega_2(f^{(k)}, h). \end{aligned} \tag{1.19}$$

este adevărată pentru orice operator liniar şi pozitiv $L : C(I) \to C(I)$, $(\forall) f \in C^k(I)$, $(\forall) x \in I$ şi $(\forall) h > 0$ astfel încât lungime$(I) \geq 2h$, atunci

$$A \geq \frac{1}{k+1},\ B \geq 1,\ C \geq \frac{1}{(k+1)(k+2)}. \tag{1.20}$$

Capitolul 2

Operatori de tip Bernstein

2.1 Operatorii lui Bernstein

Prezentăm următoarea definiţie a operatorilor Bernstein pe care o vom folosi şi în continuare.

Definiţie 2.1.1. *Fie $n \in \mathbb{N}$. Operatorii $B_n : C[0,1] \to C[0,1],\ f \mapsto B_n f$ definiţi prin*

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{2.1}$$

unde

$$p_{n,k}(x)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},\ k = \overline{0,n},\ x \in [0,1] \tag{2.2}$$

se numesc operatorii Bernstein. $B_n f$ este polinomul de grad n a lui Bernstein şi $(p_{n,k})_{k=\overline{0,n}}$ reprezintă polinoamele fundamentale a lui Bernstein de grad n.

Cu ajutorul polinoamelor lui Bernstein s-a obţinut un procedeu constructiv de demonstrare a teoremei de aproximare a lui Weierstrass(Teorema 1.1.1).

Teoremă 2.1.1. *[10] Pentru o funcţie $f(x)$ mărginită pe $[0,1]$ are loc relaţia*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f,x) = f(x)$$

pentru orice punct de continuitate x a lui f; şi relaţia are loc unform pe $[0,1]$ dacă $f(x)$ este continuă pe acest interval.

Teoremă 2.1.2. *[10] Operatorii $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reprezentaţi în Definiţia 2.1.1 au următoarele proprietăţi:*

1) *Operatorii B_n sunt liniari şi pozitivi.*

2) $\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) = 1$.

3) $B_n(e_0;x) = 1,\ B_n(e_1;x) = x,\ B_n(e_2;x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$.

4) $\|B_n\| = 1$.

5) *Polinomul lui Bernstein este interpolator relativ la f şi nodurile 0 şi 1, adică $B_n(f;0) = f(0),\ B_n(f;1) = f(1)$.*

7) *Un rezultat mai puternic îl avem dat în 1954 de W. B. Temple[121] şi de O. Aramă[16] care ne spune că pentru orice funcţie convexă f pe $[0,1]$ avem inegalitatea*

$$B_{n+1}(f;x) \leq B_n(f;x),\ x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

6) *Operatorii Bernstein conservă funcţiile liniare şi are loc egalitatea*

$$f \leq B_n(f),\ n \in \mathbb{N}$$

pentru orice funcţie f convexă.

Derivatele de ordinul $r \geq 1$ ale polinoamelor lui Bernstein pot fi exprimate astfel:

$$B_n^{(r)}(f;x) = \frac{r!n!}{(n-r)!n^r} \sum_{k=0}^{n-r} \left[f; \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \cdots, \frac{k+r}{n}\right] p_{n-r,k}(x) \tag{2.3}$$

Acest rezultat a fost dat de Popoviciu [101], ceea ce arată că pentru f convexă de ordinul $k \geq 1$, $B_n(f)$ este, de asemenea, convex. S. Wigert[129] a arătat prima dată că

$$\lim_{n\to\infty} ||B_n^{(r)}(f) - f^{(r)}|| = 0 \text{ dacă } f \in C^r[0,1],\ r \geq 1.$$

2.1.1 Evaluări cu moduli de continuitate. Optimalitatea constantelor

Prima estimare a gradului de aproximare a lui Bernstein a fost dată de T. Popoviciu [99] folosind primul modul de continuitate

$$||B_n(f) - f|| \leq \frac{3}{2}\omega_1\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ f \in C[0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

Estimarea optimă este obţinută de P. C. Sikkema[113]

$$\sup_{f\in C[0,1]\setminus\Pi_0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{||B_n(f)-f||}{\omega_1\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{4306 + 837\sqrt{6}}{5832} = 1,08988\cdots$$

De asemenea, avem şi următoarea constantă asimptotică, dată de G. C. Essen [48]

$$\sup_{f\in C[0,1]\setminus\Pi_0} \limsup_{n\to\infty} \frac{||B_n(f)-f||}{\omega_1\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\lambda(2k+2) - \lambda(2k)\right) = 1,04556\cdots$$

unde $\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{x} \exp^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Din estimarea lui B. Mond [82], obţinem

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq 2\omega_1\left(f, \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right),\ f \in B[0,1],\ n \in \mathbb{N},\ x \in (0,1).$$

În cazul funcţiilor diferenţiabile cu derivata continuă, prima estimare cu modulul de ordinul unu a fost dată de T. Popoviciu [99]. Versiunea punctuală poate fi dată sub forma:

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq C\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\omega_1\left(f', 2\cdot\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right),\ f \in C^1[0,1]$$

unde $x \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ şi $C > 0$ este o constantă absolută. Cea mai bună valoare a constantei C în această inegalitate este $C = \frac{1}{2}$ şi a fost obţinută în [87]. Din această estimare se poate obţine cea mai bună aproximare globală găsită prima dată de F. Schurr şi W. Steutel [112].

$$\sup_{f \in C[0,1] \setminus \Pi_1} \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{||B_n(f) - f||}{\frac{1}{\sqrt{n}} \omega_1 \left(f', \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{1}{4}$$

Estimări remarcabile cu modulul 2 de continuitate sunt date de Y.A. Brudnyi[23] care a arătat că există constanta $C > 0$ astfel încât

$$||B_n f - f|| \leq C\omega_2 \left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \; f \in C[0,1], \; n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Versiunea punctuală a acestui rezultat este

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq C\omega_2 \left(f, \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right), \; f \in C[0,1], \; n \in \mathbb{N}, \; x \in (0,1). \tag{2.5}$$

care a fost obţinut prima dată de Jia–ding Cao [69].

Primele constante concrete care verifică (2.4) sunt date de H. Gonska în [54] şi [57], unde avem constanta $C = 3,25$ pentru (2.5) şi constanta $C = 1,6875$ pentru (2.4) obţinută împreună cu R. K. Kovacheva [58].

În [92] R. Păltănea a demonstrat că $C = 1$ este cea mai bună constantă posibilă pentru (2.4), iar în [93] s-a arătat că $C = \frac{3}{2}$ este cea mai bună constantă care poate apărea în (2.5).

2.1.2 Evaluări asimptotice pentru operatorii lui Bernstein

Pentru operatorii Bernstein, Voronoskaya a demonstrat în [127] teorema care îi poartă numele:

Teoremă 2.1.3. *[127] Dacă f este mărginită pe $[0,1]$, diferenţiabilă pe o vecinătate a lui x şi admite derivată de ordinul 2, $f''(x)$ pentru $x \in [0,1]$ atunci*

$$\lim_{n \to \infty} n \left[B_n(f;x) - f(x)\right] = \frac{x(1-x)}{2} f''(x).$$

Dacă $f \in C^2[0,1]$, atunci convergenţa este uniformă.

Acest rezultat a fost în atenţia multor matematicieni de-a cursul ultimelor decenii. Rezultatul lui Voronoskaya a reprezentat inspiraţia lui S. Bernstein pentru a-l generaliza precum urmează:

Teoremă 2.1.4. *[20] Dacă $q \in \mathbb{N}$ este par, $f \in C^q[0,1]$, atunci uniform în $x \in [0,1]$ avem*

$$n^{\frac{q}{2}} \left[B_n(f;x) - f(x) - \sum_{r=1}^{q} B_n\left((e_1 - xe_0)^r; x\right) \cdot \frac{f^{(r)}(x)}{r!}\right] \to 0$$

Teorema 2.1.4 a fost generalizată recent pentru orice indice q de către Tachev.

Teoremă 2.1.5. *[120] Fie $q \in \mathbb{N}$ şi $C^q[0,1]$. Atunci nu există o constantă $\beta > 0$ astfel încât să aibă loc convergenţa uniformă a relaţiei*

$$n^{\frac{q}{2}+\beta} \left[B_n(f;x) - f(x) - \sum_{r=1}^{q} B_n\left((e_1 - xe_0)^r; x\right) \cdot \frac{f^{(r)}(x)}{r!}\right] \to 0, \; n \to \infty$$

Prezentăm în continuare estimări ce se pot obţine ca aplicaţii la teoria prezentată în Capitolul 1.2 la operatorii Bernstein. Aceste rezultate au fost obţinute în lucrarea noastră [95]. Pentru aceasta avem nevoie şi de următorul rezultat:

$$B_n((e_1-x)^{2s},x) \le 4x(1-x)\frac{(2s)!}{8^s s! n^s},\ x\in[0,1],\ s\in\mathbb{N},\ n\in\{1,2,3,4,5\}. \tag{2.6}$$

Acest rezultat a fost obţinut de D. Cardenas–Morales [33] pentru $n\in\{1,2,3,4\}$ şi de J. Adell şi D. Cardenas–Morales în [4] pentru $n=5$. Din acest rezultat şi Teorema 1.2.1 cu $2s$, în loc de s obţinem

Teoremă 2.1.6. *[95] Pentru $f\in C^2[0,1]$, $k\in\mathbb{N}_0$, $n,s\in\mathbb{N}$, $x\in(0,1)$ şi $h>0$ are loc*

$$\begin{aligned}&\Big|B_n(f)(x)-\sum_{j=0}^{2k}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}B_n((e_1-x)^j)(x)\Big|\\ &\le \frac{4x(1-x)}{8^k n^k}\Big(\frac{1}{k!}+h^{-2s}\frac{(2s)!}{8^s(s+k)!n^s}\Big)\omega_1(f^{(2k)},h).\end{aligned} \tag{2.7}$$

V. S. Videnskiĭ [125] a arătat că pentru $C=1$ următoarea inegalitate

$$\Big|B_n(f,x)-f(x)-\frac{x(1-x)}{2n}\cdot f''(x)\Big| \le C\frac{x(1-x)}{n}\omega_1\Big(f'',\sqrt{\frac{2}{n}}\Big), \tag{2.8}$$

care are loc pentru oricare $f\in C^2[0,1]$, $x\in(0,1)$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. Această inegalitate a fost numită inegalitatea de tip Videnskyi pentru operatorii lui Bernstein. Despre constanta C care poate apărea în această inegalitate există numeroase îmbunătăţiri: Gonska şi Raşa [63] au obţinut $C=1/2+\sqrt{5/16}=0,895285\ldots$, Abel şi Siebert [1] au obţinut $C=11/16=0,6875$, Cárdenas-Morales [33] a dat $C=617/1024=0,6025390625$ şi recent Adell şi Cárdenas-Morales [3] au obţinut $C=1/2+15/(16)^3=0,503662109375\ldots$.

Folosind Teorema 2.1.6 putem deduce că avem:

Corolar 2.1.1. *[95] Pentru orice $f\in C^2[0,1]$, $n\ge 2$, $x\in[0,1]$ are loc*

$$\Big|B_n(f,x)-f(x)-\frac{x(1-x)}{2n}\cdot f''(x)\Big| \le C_0\frac{x(1-x)}{n}\omega_1\Big(f'',\sqrt{\frac{2}{n}}\Big), \tag{2.9}$$

unde

$$C_0=\frac{1}{2}\left(1+\frac{10!}{16^5 6!}\right)=0,50240325927734375.$$

Observaţie 2.1.1. *Se alege $s=5$ deoarece pentru această valoare se obţine minimul expresiei $\frac{(2s)!}{16^s(s+1)!}$. Aceasta este cea mai bună valoare obţinută pentru constanta lui Vidensky.*

Pe de altă parte nu rezultă că C_0 este cea mai bună constantă posibilă, deoarece estimarea dată în (2.7) nu este optimală.

Corolar 2.1.2. *[95] Pentru orice $f\in C^{2k}[0,1]$, $n\ge 2$, $k\ge 1$, $x\in[0,1]$ are loc*

$$\begin{aligned}&\Big|B_n(f,x)-\sum_{j=0}^{2k}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}B_n((e_1-x)^j,x)\Big|\\ &\le \frac{4x(1-x)}{8^k k! n^k}\left[\frac{1}{2\sqrt{2k+1}}\omega_1\left(f^{(2k)},\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\Big(1+\frac{1}{8(k+1)}\Big)\omega_2\left(f^{(2k)},\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right].\end{aligned} \tag{2.10}$$

Nu se cunosc în literatură alte evaluări asimptotice cu modulul ω_2 cu care să se poată compara acest rezultat.

2.2 Alţi operatori de tip Bernstein modificaţi

În acest paragraf considerăm câţiva dintre cei mai cunoscuţi operatori obţinuţi prin modificarea operatorilor lui Bernstein.

2.2.1 Operatorul Kantorovich

Definiţie 2.2.1. *Fie $n \in \mathbb{N}$. Operatorul $K_n : L_1[0,1] \to C[0,1]$, $f \mapsto K_n f$ definiţi prin*

$$(K_n(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt$$

se numesc operatorii Kantorovich.

Dacă notăm cu χ_n funcţia caracteristică a intervalului $\left(0, \frac{1}{n+1}\right]$ atunci operatorii Kantorovich pot fi exprimaţi astfel:

$$(K_n(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\int_0^1 f(t)\chi_n\left(t-\frac{k}{n+1}\right)dt.$$

Lemă 2.2.1. *[5] Operatorii Kantorovich daţi de Definiţia 2.2.1 verifică relaţiile:*

i) $K_n(e_0;x) = 1$.

ii) $K_n(e_1;x) = \frac{n}{n+1}x + \frac{1}{2(n+1)}$.

iii) $K_n(e_2;x) = \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}x^2 + \frac{2n}{(n+1)^2}x + \frac{1}{3(n+1)^2}$.

iv) $\lim_{n\to\infty} K_n f = f$ *uniform pe* $[0,1]$*, oricare ar fi* $f \in C[0,1]$.

Din estimarea lui Shisha şi Mond se obţine:

Teoremă 2.2.1. *Dacă $f \in C[0,1]$ şi $x \in [0,1]$ atunci*

$$\begin{aligned}|K_n(f;x) - f(x)| &\le 2\omega_1\left(f, \frac{\sqrt{(n-1)x(1-x)+\frac{1}{3}}}{n+1}\right)\\ &\le 2\omega_1\left(f; \frac{1}{2\sqrt{n+1}}\right).\end{aligned}$$

2.2.2 Operatorul Durrmeyer

Definiţie 2.2.2. *Fie $n \in \mathbb{N}$ Operatorii $D_n : L_1[0,1] \to C[0,1]$, $f \mapsto D_n f$ definiţi prin*

$$D_n(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\int_0^1 p_{n,k}(t)f(t)dt$$

unde $p_{n,k}$ sunt polinoamele fundamentale ale lui Bernstein, se numeşte operatorul Durrmeyer.

Se observă că sunt liniari şi pozitivi. Următoarele proprietăţi au fost obţinute de M.M. Dierrennic [43], vezi şi O. Agratini [5].

Teoremă 2.2.2. *Operatorii Durrmeyer au următoarele proprietăţi:*

1) $D_n(e_0) = 1$.

2) Transformă orice polinom de grad p, $p \le n$ *într-un polinom de grad p.*

3) $\lim_{n\to\infty} D_n f = f$ *uniform pe* $[0,1]$, *oricare ar fi* $f \in C[0,1]$.

4) $|D_n(f;x) - f(x)| \le 2\omega_1\left(f, \frac{1}{\sqrt{2n+6}}\right)$, $(\forall) f \in C[0,1], (\forall) n \ge 3$.

2.2.3 Operatorul Durrmeyer–genuine

Considerăm operatorul Bernstein–Durrmeyer–genuine $U_n : C[0,1] \to \prod_n$, consideraţi de W. Chen [35] şi T. N. T. Goodman şi A. Sharma [64].

$$U_n(f;x) = f(0)p_{n,0}(x) + f(1)p_{n,n}(x) + (n-1)\sum_{k=1}^{n-1} p_{n,k}(x)\int_0^1 p_{n-1,k-1}(t)f(t)dt.$$

În analogie cu binecunoscuţi operatori Bernstein–Durrmeyer, operatorii Bernstein–Durrmeyer–genuine au următoarele proprietăţi

Lemă 2.2.2. *[64][65] Au loc proprietăţile:*

(i) U_n *este liniar şi pozitiv.*

(ii) $U_n e_i = e_i$, $i = \overline{0,1}$ *şi* $U_n(e_2;x) = x^2 + \frac{2x(1-x)}{n+1}$.

(iii) $\|U_n f\| \le \|f\|$.

(iv) $f \le U_k f \le U_n f$ *pentru* f *convexă şi numărul natural* $k \ge n$.

(v) U_n *este de variaţie diminuată, adică pentru oricare* $f \in C[0,1]$ *o funcţie neliniară* $S(U_n f - f) \le S(f - f)$, *unde* $S(g)$ *este funcţia care contorizează numărul schimbărilor de semn ale funcţiei* g *pe* $[0,1]$.

Considerăm operatorii diferenţiali

$$A := \frac{x(1-x)}{2}\cdot\frac{d^2}{dx^2}, \quad B := 2A = x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} \tag{2.11}$$

cu domeniul comun

$$D(A) = D(B) = \left\{u \in C[0,1] \cap C^2[0,1] : \lim_{x\to 0} x(1-x)u''(x) = \lim_{x\to 1} x(1-x)u''(x) = 0\right\}$$

Teoremă 2.2.3. *[60] Pentru orice funcţie* $f \in C^2[0,1]$ *are loc:*

$$\lim_{n\to\infty} n(B_n f - f) = Af.$$

Teoremă 2.2.4. *Există evaluarea*

$$\|U_n f - f\| \le \frac{9}{8}\omega_2\left(f, \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), \quad f \in C[0,1],\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

2.2.4 Operatorii α–Bernstein

În [34], autorii au introdus o nouă familie de operatori Bernstein modificaţi.

Definiţie 2.2.3. *[34] Considerăm funcţia f definită pe $[0,1]$, pentru orice număr natural n şi orice $\alpha \in \mathbb{R}$ fixat, definim operatorul α-Bernstein pentru f*

$$T_{n,\alpha}(f;x) = \sum_{i=0}^{n} f_i p_{n,i}^{(\alpha)}(x) \tag{2.13}$$

unde $f_i = f\left(\frac{i}{n}\right)$. Pentru $i = 0,1,\dots,n$, polinomul α-Bernstein $p_{n,i}^{\alpha}(x)$ de grad n este definit ca $p_{1,0}^{\alpha}(x) = 1-x$, $p_{1,1}^{\alpha}(x) = x$ şi

$$\begin{aligned} p_{n,i}^{(\alpha)}(x) = &\binom{n-2}{i}(1-\alpha)x + \binom{n-2}{i-2}(1-\alpha)(1-x) \\ &+ \binom{n}{i}\alpha x(1-x)\cdot x^{i-1}(1-x)^{n-i-1}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

unde $n \geq 2,\ 0 \leq i \leq n,\ x \in [0,1]$.

Calculând câţiva termeni precum urmează, observăm următoarele formule:

$$\begin{aligned} p_{n,0}^{\alpha}(x) &= (1-\alpha x)(1-x)^{n-1} \\ p_{n,n}^{\alpha}(x) &= (1-\alpha+\alpha x)x^{n-1} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Când $\alpha = 1$, Polinomul α-Bernstein se reduce la polinomul Bernstein clasic.

Lemă 2.2.3. *[34] Pentru orice $n \geq 1$, şi orice α:*

i) (Proprietatea de interpolare) Operatorul α-Bernstein pentru $f(x)$ interpolează $f(x)$ la ambele capete ale intervalului $[0,1]$, adică

$$T_{n,\alpha}(f;0) = f(0) \text{ si } T_{n,\alpha}(f;1) = f(1).$$

ii) (Liniaritatea) Operatorul α-Bernstein este liniar, altfel,

$$T_{n,\alpha}(\lambda f + \mu g) = \lambda T_{n,\alpha}(f) + \mu T_{n,\alpha}(g),$$

pentru orice funcţie $f(x)$ şi $g(x)$ definite pe $[0,1]$ şi orice $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Lemă 2.2.4. *[34] Au loc următoarele proprietăţi:*

i) $T_{n,\alpha}(e_0;x) = 1$.

ii) $T_{n,\alpha}(e_1;x) = x$.

iii) Operatorul α-Bernstein reproduce funcţiile liniare, precum urmează

$$T_{n,\alpha}(ax+b;x) = ax+b$$

pentru orice numere reale a şi b.

iv) Operatorul α-Bernstein este un operator monoton pentru $0 \leq \alpha \leq 1$, deci, dacă $f(x) \geq g(x)$, $x \in [0,1]$, atunci $T_{n,\alpha}(f,x) \geq T_{n,\alpha}(g;x)$, $x \in [0,1]$.

v) *Dacă $f(x)$ este nenegativă pe $[0,1]$, atunci operatorul α-Bernstein o transformă tot într-o funcţie pozitivă.*

Lemă 2.2.5. *[34] Au loc următoarele identităţi:*

i) $T_{n,\alpha}(e_2;x) = x^2 + \frac{n+2(1-\alpha)}{n^2}x(1-x)$.

ii) $T_{n,\alpha}(e_3;x) = x^3 + \frac{3[n+2(1-2\alpha)]}{n^2}x^2(1-x) + \frac{n+6(1-\alpha)}{n^3}x(1-x)(1-2x)$.

iii)

$$\begin{aligned} T_{n\alpha}(e_4;x) =& x^4 + \frac{6[n+2(1-\alpha)]}{n^2}x^3(1-x) + \frac{4[n+6(1-\alpha)]}{n^3}x^2(1-x)(1-2x) \\ &+ \frac{[3n(n-2_+12(n-6)(1-\alpha]x(1-x) + [n+14(1-\alpha)]}{n^4}x(1-x). \end{aligned}$$

Teoremă 2.2.5. *[34] Dacă funcţia $f(x)$ este continuă pe $[0,1]$, pentru orice $\alpha \in [0,1]$, operatorul α–Bernstein converge uniform la $f(x)$ pe intervalul $[0,1]$.*

Următoarea teoremă este o teoremă de tip Voronoskaja.

Teoremă 2.2.6. *[34] Fie $f(x)$ mărginită pe $[0,1]$. Atunci, pentru orice $x \in [0,1]$ unde $f''(x)$ există,*

$$\lim_{n\to\infty} n[T_{n,\alpha}(f;x) - f(x)] = \frac{1}{2}x(1-x)f''(x),$$

unde $0 \le \alpha \le 1$.

Următorul rezultat ne dă o margine superioară pentru eroarea de aproximare.

Teoremă 2.2.7. *[34] Dacă $f(x)$ este mărginită pe $[0,1]$, atunci, pentru $0 \le \alpha \le 1$*

$$||f(x) - T_{n,\alpha}(f;x)|| \le \frac{3}{2}\omega_1\left(\frac{\sqrt{n+2(1-\alpha)}}{n}\right).$$

Teoremă 2.2.8. *[34] Fie $f \in C[0,1]$. Dacă $f(x)$ este crescătoare (sau descrescătoare) pe $[0,1]$ pentru $0 \le \alpha \le 1$, atunci şi operatorul α–Bernstein este descrescător (respectiv crescător).*

Teoremă 2.2.9. *[34] Fie $f \in C[0,1]$. Dacă $f(x)$ este convex pe $[0,1]$, atunci şi operatorul α–Bernstein este convex pentru orice $0 \le \alpha \le 1$.*

Varianta Chlodovsky a operatorilor $T_{n,\alpha}$ a fost studiată în [116]. Va fi prezentată în Capitolul 3.

2.3 Operatori obţinuţi prin iterare

În acest paragraf vom construi o nouă clasă de operatori care se obţin prin iterare. În această construcţie se foloseşte o metodă de modificare a operatorilor α–Bernstein, făcând la fiecare pas o alegere convenabilă parametrului α. Scopul principal este de a obţine operatori care să aibă proprietatea de conservare a convexităţii de ordin superior. Rezultatele din acestă secţiunea sunt cuprinse în lucrarea [97].

Pentru întregii $0 \le r < n$ considerăm operatorul

$$T_n^r(f)(x) = \sum_{i=0}^{n-r} p_{n-r,i}(x) F_{n,i}^r(f),\ f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \in [0,1], \tag{2.16}$$

unde funcţionalele $F_{n,i}^r$ sunt definite recursiv prin $F_{n,i}^0(f) = f\left(\frac{i}{n}\right)$, $0 \le i \le n$ şi pentru $r \ge 1$:

$$F_{n,i}^r(f) = \left(1 - \frac{i}{n-r}\right) F_{n,i}^{r-1}(f) + \frac{i}{n-r} F_{n,i+1}^{r-1}(f),\ 0 \le i \le n-r. \tag{2.17}$$

Observăm că pentru $r = 0$, T_n^r coincide cu operatorul Bernstein, B_n. De asemenea, operatorul T_n^1 poate fi pus în legătură cu operatorii $T_{n,\alpha}$, definiţi de $T_{n,\alpha} = \alpha B_n + (1-\alpha)T_n^1$, pentru $\alpha \in [0,1]$, introduşi de Chen în [34].

Pentru operatorii T_n^r vom studia în această secţiune reprezentarea explicită, momentele, estimările gradului de aproximare folosind moduli de continuitate, teorema de tip Voronoskaja, păstrarea convexităţii de ordin superior şi aproximarea simultană. Există o analogie parţială între operatorii T_n^r şi compunerea prin iterare a operatorilor Bernstein: $(B_n)^r := B_n \circ \cdots \circ B_n$, ($r$ ori).

2.3.1 Identităţi de bază

Lemă 2.3.1. *Pentru întregii $0 \le r < n$, $0 \le i \le n-r$ are loc:*

i) $F_{n,i}^r(e_0) = 1$,

ii) $F_{n,i}^r(e_1) = \frac{i}{n-r}$.

Corolar 2.3.1. *Pentru întregii $0 \le r < n$, şi $x \in [0,1]$, următoarele relaţii sunt adevărate:*

i) $T_n^r(e_0)(x) = 1$,

ii) $T_n^r(e_1)(x) = x$.

Pentru $a \in \mathbb{R}$, şi $n \in \mathbb{N}_0$ notăm cu $(a)_n$ simbolul Pochhammer, definit prin $(a)_0 = 1$ şi $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$, pentru $n \ge 1$.

Pentru $n, r, i, k \in \mathbb{N}_0$, $0 \le r \le n$, $0 \le i \le n-r$, $0 \le k \le r$ definim

$$c_{n,r,i,k} = \binom{r}{k}(n-i-r)_{r-k}(i)_k. \tag{2.18}$$

Lemă 2.3.2. *Pentru $f \in C[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$, $0 \le r < n$, $0 \le i \le n-r$, avem*

$$F_{n,i}^r(f) = \frac{1}{(n-r)_r} \sum_{k=0}^{r} c_{n,r,i,k} f\left(\frac{i+k}{n}\right). \tag{2.19}$$

Observaţie 2.3.1. Din Lema 2.3.2 rezultă că

$$T_n^{n-1}(f)(x) = (1-x)f(0) + xf(1),\ f : [0,1] \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1].$$

Această relaţie arată că operatorii T_n^r fac legătura între operatorii B_n şi B_1, similar cu legătura făcută de $(B_n)^r$, pentru $r = 1$ şi limita când $r \to \infty$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ considerăm operatorul

$$G_n(f)(t) = (1-t)f\left(\frac{n-1}{n}t\right) + tf\left(\frac{n-1}{n}t + \frac{1}{n}\right),\ f \in C[0,1],\ t \in [0,1]. \tag{2.20}$$

Lemă 2.3.3. *Pentru* $1 \leq r < n$ *şi* $f \in C[0,1]$ *are loc*

$$T_n^r(f)(x) = (T_{n-1}^{r-1} \circ G_n)(f)(x), \ x \in [0,1]. \tag{2.21}$$

Corolar 2.3.2. *Pentru întregii* $0 \leq r < n$ *există reprezentarea*

$$T_n^r = B_{n-r} \circ G_{n-r+1} \circ G_{n-r+2} \circ \ldots \circ G_n. \tag{2.22}$$

2.3.2 Momentele

Lemă 2.3.4. *Pentru* $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ *are loc*

$$G_n((e_1 - xe_0)^p)(t) = \sum_{j=0}^{p} (t-x)^j d_{n,p,j}(x), \ t, x \in [0,1], \tag{2.23}$$

unde

$$\begin{aligned} d_{n,p,j}(x) &= \frac{1}{n^p}\binom{p}{j}(n-1)^j\Big[(1-x)(-x)^{p-j} + x(1-x)^{p-j}\Big] \\ &\quad + \frac{1}{n^p}\binom{p}{j-1}(n-1)^{j-1}\Big[x(-x)^{p-j} + (1-x)(1-x)^{p-j}\Big]. \end{aligned}$$

Definim momentele de ordin p ale operatorilor T_n^r, prin

$$M^p[T_n^r](x) = T_n^r((e_1 - xe_0)^p)(x), \ 0 \leq r < n, \ p \geq 0, \ x \in [0,1]. \tag{2.24}$$

Din Lema 2.3.3 şi Lema 2.3.4 avem următoarea relaţie de recurenţă

Corolar 2.3.3.

$$M^p[T_n^r](x) = \sum_{j=0}^{p} d_{n,p,j}(x) M^j[T_{n-1}^{r-1}](x), \ 1 \leq r < n, \ p \geq 0, \ x \in [0,1]. \tag{2.25}$$

Lemă 2.3.5. *Avem, pentru* $x \in [0,1]$, $0 \leq r < n$*:*

$$M^0[T_n^r](x) = 1; \tag{2.26}$$

$$M^1[T_n^r](x) = 0; \tag{2.27}$$

$$M^2[T_n^r](x) = \frac{n+r+1}{n(n-r+1)} x(1-x); \tag{2.28}$$

$$M^3[T_n^r](x) = \frac{n^2 + 4nr + 3n + r^2 + 3r + 2}{n^2(n-r+1)(n-r+2)} x(1-x)(1-2x); \tag{2.29}$$

$$M^4[T_n^r](x) = x(1-x)a_{n,r}(x), \ \text{cu } |a_{n,r}(x)| \leq C_r \cdot \frac{1}{n^2} \tag{2.30}$$

unde C_r *este independent de* $n \in \mathbb{N}$, *şi* $x \in [0,1]$.

Lemă 2.3.6. *Pentru întregii* n, r, p, *cu* $n > r + p$ *avem reprezentarea*

$$T_n^r(e_p)(x) = \left(\frac{n-r}{n}\right)^p B_{n-r}(e_p)(x) + R_{n,p,r}(x), \tag{2.31}$$

unde $R_{n,p}(x)$ *este un polinom cu grad cel mult* p *având toţi coeficenţii de tip* $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, *depinzând de* p *şi* r.

2.3.3 Estimări ale gradului de aproximare prin operatorii T_n^r

În această secţiune deducem estimările ordinului de aproximare folosind modulul de continuitate de ordinul întâi, modul uzual de continuitate de ordinul al doilea şi modulul al doilea a lui Ditzian-Totik.

Teoremă 2.3.1. *Pentru $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$ şi întregii $0 \le r < n$ următoarele estimări sunt adevărate:*

$$|T_n^r(f)(x) - f(x)| \le 2\omega_1\left(f, \sqrt{\frac{(n+r+1)x(1-x)}{n(n-r+1)}}\right), \tag{2.32}$$

$$|T_n^r(f)(x) - f(x)| \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(n+r+1)x(1-x)}{n(n-r+1)}}\omega_1\left(f', 2\sqrt{\frac{(n+r+1)x(1-x)}{n(n-r+1)}}\right), \tag{2.33}$$

$$|T_n^r(f)(x) - f(x)| \le \frac{3}{2}\omega_2\left(f, \sqrt{\frac{(n+r+1)x(1-x)}{n(n-r+1)}}\right), \tag{2.34}$$

$$|T_n^r(f)(x) - f(x)| \le \frac{5}{2}\omega_2^{\varphi}\left(f, \sqrt{\frac{n+r+1}{n(n-r+1)}}\right), \tag{2.35}$$

unde, adiţional, în inegalitatea (2.33) presupunem că $f \in C^1[0,1]$, în inegalitatea (2.34) presupunem că $2\sqrt{\frac{(n+r+1)x(1-x)}{n(n-r+1)}} \le 1$ şi în inegalitatea (2.35) presupunem că $2\sqrt{\frac{n+r+1}{n(n-r+1)}} \le$ 1.

Corolar 2.3.4. *Pentru orice $f \in C[0,1]$ şi întregul $r \ge 0$ are loc:*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n^r(f) - f\| = 0, \tag{2.36}$$

Vom da o versiune cantitativă a teoremei Voronoskaja. Pentru aceasta vom folosi cel mai mic majorant concav al primului modul de continuitate, dat pentru funcţia $f \in B[a,b]$ şi $h > 0$ din

$$\tilde{\omega}_1(f,h) = \begin{cases} \sup\limits_{\substack{0\le x\le h\le y\le b\\ x\ne y}} \frac{(h-x)\omega_1(f,y)+(y-h)\omega_1(f,x)}{y-x}, & 0 < h \le b-a \\ \omega_1(f,1), & h > b-a. \end{cases} \tag{2.37}$$

Teoremă 2.3.2. *Dacă $f \in C^2[0,1]$, $r \ge 0$ este un întreg şi $x \in [0,1]$, atunci avem*

$$\left|T_n^r(f)(x) - f(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{(n+r+1)x(1-x)}{n(n-r+1)}\cdot f''(x)\right| \tag{2.38}$$

$$\le \tilde{C}_r\frac{x(1-x)}{n}\tilde{\omega}_1\left(f'', \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{2.39}$$

unde $\tilde{C}_r > 0$ este o constantă independentă de f, n şi x.

2.3.4 Convexitatea de ordin superior. Aproximare simultană

Reamintim că notăm prin D operatorul de derivare şi prin $D^s := D \circ D \circ D \circ \cdots \circ D$, ($s$-ori), operatorul derivatei de ordin s. Dacă $f \in C^{s+1}(I)$, atunci f este convexă de ordin s dacă şi numai dacă $D^{s+1}f(x) \ge 0$, pentru orice $x \in I$. Un operator care transformă orice funcţie s-convexă într-o funcţie s-convex se numeşte operatorul convex de ordin s.

Lemă 2.3.7. *Pentru $f \in C[0,1]$, şi întregii $0 \le r < n$, $0 \le s < n-r$ avem*

$$D^s T_n^r(f)(x) = \frac{(n-r-s+1)_s}{(n-r)_r} \sum_{i=0}^{n-r-s} p_{n-r-s,i}(x) \sum_{k=0}^{r} c_{n+s,r,i+s,k} \Delta_{\frac{1}{n}}^s f\left(\frac{i+k}{n}\right). \quad (2.40)$$

Teoremă 2.3.3. *Fie întregii n, r astfel încât $n > r$. Atunci operatorul T_n^r este convex de ordin s pentru orice întreg $s \ge -1$ astfel că $n > r + s$.*

Cu ajutorul acestui fapt deducem proprietatea aproximării simultane a operatorilor T_n^r.

Teoremă 2.3.4. *Pentru întregii $0 \le r < n$ şi $0 \le s < n-r$ avem*

$$\lim_{n\to\infty} \|(D^s \circ T_n^r)(f) - D^s f\| = 0 \quad (2.41)$$

Capitolul 3

Operatori de aproximare pentru intervale necompacte

Capitolul prezintă două tipuri de aproximare pe intervale necompacte, acestea fiind aproximarea uniformă pe intervale compacte şi aproximarea ponderată.

Mai întâi introducem următoarele noţiuni de bază pe care le vom folosi în continuare.

Numim pondere pe intervalul $[0, \infty)$, o funcţie $\rho \in C[0, \infty)$ cu proprietatea că $\rho(x) > 0,\ x \in [0, \infty)$ şi $\lim_{x\to\infty} \rho(x) = 0$.

Definim următoarele spaţii de funcţii:

- $UC_b(I)$ - spaţiul funcţiilor reale, uniform continue şi mărginite definite pe I, unde I este un interval real

- $B_\rho[0, \infty) = \{f : [0, \infty) \to \mathbb{R} | \exists M_f > 0$ astfel încât $\rho(x)f(x) \le M_f\ (\forall)x \in [0, \infty)\}$ unde M_f este o constantă depinzând de f.

- $C_\rho^b[0, \infty) = C[0, \infty) \cap B_\rho[0, \infty)$

- $C_\rho^*[0, \infty) = \{f \in C[0, \infty) |\ \exists\ \lim_{x\to\infty} f(x)\rho(x) \in \mathbb{R}\}$

- $C_\rho^0[0, \infty) = \{f \in C[0, \infty) |\ \exists\ \lim_{x\to\infty} f(x)\rho(x) = 0 \in \mathbb{R}\}$

Dacă $\rho(x) = \frac{1}{1+x^N}$ notăm $C_\rho^*[0, \infty)$ cu $C_N^*[0, \infty)$.

Putem observa uşor că $C_\rho^0[0, \infty) \subset C_\rho^*[0, \infty) \subset C_\rho^b[0, \infty) \subset B_\rho[0, \infty)$.

Pe $B_\rho[0, \infty)$ definim norma $||f||_\rho$ prin

$$||f||_\rho = \sup_{x\in[0,\infty)} \rho(x)|f(x).|$$

În raport cu această normă $B_\rho[0, \infty)$ este un spaţiu Banach.

De asemenea, pentru o mulţime compactă K definim norma supremum funcţiei f pe mulţimea K astfel

$$||f||_K = \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

3.1 Rezultate generale în teoria aproximării pe necompact a operatorilor liniari şi pozitivi

Începem printr-un exemplu dat de Z. Ditzian [45] care arată că Teorema lui Korovkin nu este adevărată pentru toate şirurile de operatori liniari şi pozitivi aplicate funcţiilor continue definite pe un interval necompact, chiar dacă restrâgem la un interval compact funcţiile obţinute ca imagini.

Considerăm şirul de operatori liniari şi pozitivi $(L_n)_n,\ L_n : C_\rho^0[0,\infty) \to C[0,1]$, unde $\rho(x) = e^{-x}$, definiţi prin

$$L_n(f,x) = B_n(f|_{[0,1]};x) + f(n)e^{-n},\ x \in [0,1],\ f \in C_\rho^0[0,\infty),$$

iar B_n este operatorul lui Bernstein.
Atunci $L_n(e_k;x) \to x^k$ pentru $k = 0,1,2$ uniform pe $[0,1]$, dar $L_n(e^t;x) \to e^x + 1$ uniform pe $[0,1]$.

Pentru a obţine extinderea teoremei lui Korovkin în cazul intervalelor necompacte sunt necesare condiţii suplimentare.

În [7], F. Altomare a prezentat rezultate generale de tip Korovkin într-un context mai abstract al spaţiilor metrice. Cele mai reprezentative sunt date de următoarele teoreme. Mai întâi considerăm spaţiul metric (X,d). Notăm cu

$$d_x(y) := d(x,y),\ x,\ y \in X.$$

Teoremă 3.1.1. *[7] Fie (X,d) un spaţiu metric şi fie E o sublatice vectorială a lui $\mathcal{F}(X)$ care conţine funcţiile constante şi toate funcţiile $d_x^2 (x \in X)$ unde $\mathcal{F}(X)$ este spaţiul funcţiilor reale pe X. Fie $(L_n)_{n\geq 1}$ un şir de operatori liniari şi pozitivi din E în $\mathcal{F}(X)$ şi fie Y o submulţime a lui X astfel încât*

(i) $\lim_{n\to\infty} L_n(e_0) = 1$ *uniform pe* Y

(i) $\lim_{n\to\infty} L_n(d_x^2;x) = 0$ *uniform în raport cu* $x \in Y$.

Atunci pentru orice $f \in E \cap UC_b(X)$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f \ uniform\ pe\ Y$$

unde $UC_b(X)$ este spaţiul funcţiilor uniform continue şi mărginite pe X.

Teoremă 3.1.2. *[7] Fie (X,d) un spaţiu metric local compact şi fie E o sublatice vectorială a lui $\mathcal{F}(X)$ care conţine funcţia constantă 1 şi toate funcţiile $d_x^2 (x \in X)$. Fie $L_n : E \to \mathcal{F}$ un şir de operatori liniari şi pozitivi astfel încât*

(i) $\lim_{n\to\infty} L_n(e_0) = 1$ *uniform pe submulţimile compacte din* X

(i) $\lim_{n\to\infty} L_n(d_x^2;x) = 0$ *uniform pe submulţimile compacte din* X

unde $n \geq 1$. Atunci pentru orice $f \in E \cap C_b(X)$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f \ \text{uniform pe submulţimile compacte din } X$$

unde $UC_b(X)$ este spaţiul funcţiilor uniform continue şi mărginite pe X.

J. Bustamante prezintă în [27] câteva teoreme directe pentru şiruri de operatori liniari şi pozitivi în spaţii ponderate. Considerăm $m \in \mathbb{N}$ fixat şi ponderea

$$\rho(x) = \rho_m(x) = (1+x)^{-m},\ x \in [0,\infty).$$

Pentru $a \in \mathbb{N},\ b > 0,\ c \geq 0$ notăm

$$\varphi(x) = \sqrt{(1+ax)(bx+c)}$$

Pentru estimări în normă folosim următorul modul ponderat pentru orice $f \in C_\rho^*[0,\infty)$ cu

$$\omega_2^\varphi(f,t)_\rho = \sup_{h\in(0,t]} \sup_{x\in I(\varphi,h)} |\rho(x)\Delta^2_{h\varphi(x)} f(x)| \tag{3.1}$$

unde $I(\varphi,h) = \{x > 0 : h\varphi \leq x\}$. În [28], M. Becker a introdus următorul modul de netezime, pentru $f \in C_\rho[0,\infty)$ şi $h > 0$

$$\omega_2(f,t)_\rho = \sup_{o<h\leq t} \sup_{x\geq 0} \rho(x)|f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)| \tag{3.2}$$

Prezentăm în continuare cu o formulă echivalentă rezultatul obţinut J. Bustamante în [27]:

Teoremă 3.1.3. *[27] Fie m un număr natural fixat şi fie $\rho(x) = (1+x)^{-m}$. Pentru $a \in \mathbb{N}$ şi $b,\ c \in \mathbb{R}$ cu $b > 0$ şi $c > 0$. Considerăm $\varphi(x) = \sqrt{x(1+ax)}$ şi un operator liniar şi pozitiv $L_n : C_\rho^*[0,\infty) \to C[0,\infty)$ având proprietăţile următoare:*

(i) $L_n(e_0) = e_0$ *şi* $L_n(e_1) = e_1$

(ii) există o constantă C_1 şi un şir $(\alpha_n)_n$ astfel încât

$$L_n\left((e_1 - e_0x)^2, x\right) \leq C_1\alpha_n\varphi^2(x),\ x \geq 0.$$

(iii) există o constantă $C_2 = C_2(m)$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$

$$L_n\left((e_0 + e_1)^m, x\right) \leq C_2(1+x)^m,\ x \geq 0.$$

(iv) există o constantă $C_3 = C_3(m)$ astfel încât pentru oricare $n \in \mathbb{N}$

$$\rho(x)L_n\left(\frac{(e_1 - e_0x)^2}{\rho(x)}; x\right) \leq C_3\alpha_n\varphi^2(x),\ x \geq 0$$

Atunci există o constantă C astfel încât, pentru oricare $f \in C_\rho[0,\infty)$ şi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\alpha_n \leq \frac{1}{2\sqrt{2+a}}$

$$||f - L_n(f)||_\rho \leq C\omega_\varphi^2\left(f, \sqrt{\alpha_n}\right)_\rho,\quad f \in C_\rho^*[0,\infty)$$

unde $\omega_\varphi^2(f,t)_\rho$ este modulul din (3.1).

Teoremă 3.1.4. *[27] Presupunem condiţiile din Teorema 3.1.3, exceptând faptul că $L_n(e_1; x) = e_1$. Atunci*

i) există o constantă C astfel încât, pentru oricare $f \in C_\rho^*[0,\infty)$ şi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\alpha_n \leq \frac{1}{2\sqrt{2+a}}$

$$||f - L_n(f)||_\rho \leq C\omega_\varphi^1\left(f, \sqrt{\alpha_n}\right)_\rho$$

unde

$$\omega_\varphi^1(f,t)_\rho = \sup_{h\in(0,t]} \sup_{2t\geq h\varphi(x)} \left|\rho(x)\left(f\left(x + \frac{h}{2}\varphi(x)\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\varphi(x)\right)\right)\right|$$

.

ii) există o constantă C astfel încât, pentru oricare $f \in C^*_\rho[0,\infty)$ şi $n \in \mathbb{N}$

$$\rho(x)|f(x) - L_n(f;x)| \leq C\omega_1\left(f, \sqrt{\alpha_n}\right)_\rho, \; x \geq 0$$

unde

$$\omega_1(f,t)_\rho = \sup_{0\leq h\leq t}\sup_{x\geq 0}\rho(x)|f(x+h) - f(x)|$$

.

R. Păltănea a prezentat în [89] estimări cu constante explicite ale gradului de aproximare prin operatori liniari şi pozitivi pe intervalul $[0,\infty)$ folosind moduli de continuitate ponderaţi.

Începem prin a considera următoarele:

Definiţie 3.1.1. *[89] O funcţie $\varphi \in C[0,\infty)$ este numită admisibilă dacă verifică următoarele condiţii:*

(i) $\varphi(t) > 0, \; (\forall) t \in (0,\infty)$.

(ii) $\frac{1}{\varphi}$ *convexă pe* $(0,\infty)$.

(iii) Pentru $x > 0$ *avem*

$$\int_{0+0}^{x}\frac{dt}{\varphi(t)} < \infty; \; pentru (\forall) x > 0. \tag{3.3}$$

(iv) Avem

$$\int_{0+0}^{x}\frac{dt}{\varphi(t)} = \infty. \tag{3.4}$$

În această definiţie folosim integrala Riemann improprie. Folosind o funcţie φ admisibilă se introduce următorul modul ponderat de ordinul întâi:

Definiţie 3.1.2. *[89] Pentru $f \in \mathcal{F}[0,\infty)$ şi $h > 0$ avem*

$$\omega^\varphi(f,h) = \sup\left\{|f(v) - f(u)|, \; u,v \in [0,\infty), \; |u-v| \leq h\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right\} \tag{3.5}$$

Admitem în definiţie că supremum poate fi egal cu ∞.

Pentru o funcţie admisibilă φ ataşăm următoarea funcţie:

$$\theta(x) = \int_{0+0}^{x}\frac{dt}{\varphi(t)}, \; x \in (0,\infty) \tag{3.6}$$

Teoremă 3.1.5. *[89] Fie W un subspaţiu liniar a lu $\mathcal{F}[0,\infty)$ şi fie $F : W \to \mathbb{R}$ o funcţională liniară pozitivă. Fie $x \in [0,\infty)$ şi fie φ o funcţie admisibilă. Presupunem că $(\theta - \theta(x)e_0)^2 \in W$ şi $e_0 \in W$. Atunci pentru oricare $f \in W$ şi oricare $h > 0$ avem*

$$\begin{aligned}|F(f) - f(x)| \leq & |f(x)| \cdot |F(e_0) - 1| \\ & + \left(F(e_0) + h^{-2}F\left((\theta - \theta(x)\cdot e_0)^2; x\right)\right)\omega^\varphi(f,h).\end{aligned} \tag{3.7}$$

În cazul $\varphi = e_0$ avem $\theta = e_1$ şi relaţia (3.7) devine binecunoscută estimare a lui Mond.

Prezentăm o estimare pentru ponderea $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^n}, \; n \in \mathbb{N}, \; n \geq 2$.

Teoremă 3.1.6. *[89] Fie $W \subset \mathcal{F}[0,\infty)$ un subspaţiu liniar astfel încât $\prod_{2n} \in W$. Dacă $L : W \to F[0,\infty)$ este un operator liniar şi pozitiv, atunci oricare ar fi $f \in W$, $x \in [0,\infty)$ şi $h > 0$ avem*

$$\begin{aligned} |L(f;x) - f(x)| \leq & |f(x)| \cdot |L(e_0;x) - 1| + \\ & \left(L(e_0;x) + \frac{4}{h^2 x} L\left((e_1 - xe_0)^2 (2e_0 + x^{2n} e_0 + e_{2n}); x\right) \right) \cdot \omega^{\varphi}(f,h). \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.2 Estimări generale ale aproximării ponderate pe intervale necompacte folosind moduli clasici de continuitate

În cadrul acestei subcapitol prezentăm unele rezultate obţinute pentru aproximarea ponderată pe intervalul $[0,\infty)$ prin operatori liniari şi pozitivi. O atenţie specială este acordată ponderilor 1 şi $1/(1+x^2)$. Aplicaţii la aceste rezultate sunt date pentru operatorii Szász-Mirakjan şi operatorii Baskakov. Fixăm o funcţie pondere ρ definită pe intervalul $[0,\infty)$, adică o funcţie continuă şi strict pozitivă pe acest interval. Rezultatele din această secţiune sunt cuprinse în lucrarea [94].

Pentru a estima gradul de aproximare a funcţiei din spaţiul $C^*_\rho[0,\infty)$, printr-un şir de operatri liniari şi pozitivi definiţi pe spaţiul acesta putem aplica diferiţi moduli ponderaţi de ordinul întâi, vezi [53] [27], [77], [128], [66], [89] şi mulţi alţi.
Vom considera aici o altă abordare care conduce la estimări cu moduli clasici.

Astfel, o metodă constă în reducerea problemei de aproximare pe spaţiul $C^*_\rho[0,\infty)$ la problema de aproximare pe spaţiul $C[0,1]$ folosind o transformare. Această ultimă metodă de compactificare pentru problema de convergenţă a fost folosită de Bustamante în [25]. Noi suntem intersaţi să obţinem rezultatele cantitative ale gradului de aproximaţie folosind această transformare.

Pentru acest scop, notăm

$$\psi(y) = \frac{y}{1-y}, \quad y \in [0,1). \tag{3.9}$$

Funcţia $\psi : [0,1) \to [0,\infty)$ este o bijecţie cu funcţia inversă

$$\psi^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}, \quad x \in [0,\infty). \tag{3.10}$$

Considerăm operatorul liniar $\Phi : C^*_\rho[0,\infty) \to C[0,1]$ definit de

$$\Phi(f,y) = \begin{cases} \rho(\psi(y))f(\psi(y)), & \text{dacă } y \in [0,1) \\ \lim_{x\to\infty} \rho(x)f(x), & \text{dacă } y = 1 \end{cases} \qquad f \in C^*_\rho[0,\infty) \tag{3.11}$$

Operatorul Φ admite operatorul invers $\Phi^{-1} : C[0,1] \to C^*_\rho[0,\infty)$ dat de

$$\Phi^{-1}(g,x) = \frac{g(\psi^{-1}(x))}{\rho(x)},\ g \in C[0,1],\ x \in [0,\infty). \tag{3.12}$$

Fie $L : C^*_\rho[0,\infty) \to C^*_\rho[0,\infty)$ un operator liniar şi pozitiv. Considerăm operatorul liniar $L^\Phi : C[0,1] \to C[0,1]$, dat de:

$$L^\Phi(g) = (\Phi \circ L \circ \Phi^{-1})(g),\ g \in C[0,1], \tag{3.13}$$

care evident că este, de asemenea, un operator pozitiv care satisface condiţia $\|f-L(f)\|_\rho = \|\Phi f - L^\Phi(\Phi f)\|_\infty$, pentru orice $f \in C^*_\rho[0,\infty)$. Folosind această transformare studiul aproximări ponderate prin şirul de operatori $(L_n)_n$, $L_n : C_{\rho,\infty}[0,\infty) \to C_{\rho,\infty}[0,\infty)$ este redus la aproximarea uniformă prin şirul de operatori $(L_n^\Phi)_n$, pe spaţiul mai simplu $C[0,1]$.

Există multe estimări cu momente şi moduli diferiţi de ordinul întâi şi doi. Vezi [87]. În ceea ce urmează vom folosi numai două estimări generale, care sunt date în contexul general al intervalelor arbitrare pentru a le aplica într-un mod dublu: direct şi prin transformarea care urmează.

Teoremă 3.2.1. *Fie ρ o pondere continuă strict pozitivă pe intervalul $[0,\infty)$. Fie $L : C^*_\rho[0,\infty) \to C^*_\rho[0,\infty)$ un operator liniar şi pozitiv şi $f \in C^*_\rho[0,\infty)$. Pentru orice $x \in [0,\infty)$ şi $h > 0$ avem*

$$\begin{aligned} |L(f,x) - f(x)| &\leq |f(x)|\Big|\rho(x)L\Big(\frac{e_0}{\rho},x\Big) - 1\Big| \\ &+ \Big[L\Big(\frac{e_0}{\rho},x\Big) + \frac{1}{h^2}L_n\Big(\frac{(\psi^{-1}-\psi^{-1}(x)e_0)^2}{\rho},x\Big)\Big]\,\omega_1(\Phi f,h). \qquad (3.14) \\ |L(f,x) - f(x)| &\leq |f(x)|\Big|\rho(x)L\Big(\frac{e_0}{\rho},x\Big) - 1\Big| \\ &+\frac{1}{h}\Big|L\Big(\frac{\psi^{-1}-\psi^{-1}(x)e_0}{\rho},x\Big)\Big|\omega_1(\Phi f,h) \\ &+ \Big[L\Big(\frac{e_0}{\rho},x\Big) + \frac{1}{2h^2}L\Big(\frac{(\psi^{-1}-\psi^{-1}(x)e_0)^2}{\rho},x\Big)\Big]\,\omega_2(\Phi f,h). \qquad (3.15) \end{aligned}$$

În ceea ce urmează considerăm două ponderi importante $\rho(x) = 1$ şi $\rho(x) = 1/(1+x^2)$, $x \geq 0$. Aproximarea în raport cu ponderea $\rho(x)$ este echivalentă cu aproximarea uniformă.

Teoremă 3.2.2. *Fie $\rho(x) = 1$, $x \geq 0$. Fie $L : C^*_\rho[0,\infty) \to C^*_\rho[0,\infty)$ un operator liniar şi pozitiv şi $f \in C^*_\rho[0,\infty)$. Pentru orice $x \in [0,\infty)$ avem*

$$\begin{aligned} |L(f,x) - f(x)| &\leq |f(x)| \cdot |L(e_0,x) - 1| \\ &+ (L(e_0,x)+1)\omega_1\left(f\circ\psi, \frac{\sqrt{L(e_1-xe_0)^2,x)}}{1+x}\right) \qquad (3.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |L(f,x) - f(x)| &\leq |f(x)| \cdot |L(e_0,x) - 1| \\ &+ \sqrt{L(e_0,x)}\omega_1\left(f\circ\psi, \frac{\sqrt{L(e_1-xe_0)^2,x)}}{1+x}\right) \\ &+ \Big(L(e_0,x) + \frac{1}{2}\Big)\omega_2\left(f\circ\psi, \frac{\sqrt{L(e_1-xe_0)^2,x)}}{1+x}\right) \qquad (3.17) \end{aligned}$$

Observaţie 3.2.1. *Dacă aplicăm estimarea din Teorema 1.1.4 şi estimarea din Teorema*

1.1.8 pentru $I = [0,\infty)$, f *şi* x *pentru* $h = \sqrt{L(e_1 - xe_0)^2, x)}$ *obţinem*

$$\begin{aligned} |L(f,x) - f(x)| &\leq |f(x)| \cdot |L(e_0,x) - 1| \\ &\qquad +(L(e_0,x)+1)\omega_1\left(f, \sqrt{L(e_1 - xe_0)^2, x)}\right) \quad (3.18) \\ |L(f,x) - f(x)| &\leq |f(x)| \cdot |L(e_0,x) - 1| \\ &\qquad \frac{|L(e_1 - xe_0, x)|}{\sqrt{L(e_1 - xe_0)^2, x)}}\omega_1\left(f, \sqrt{L(e_1 - xe_0)^2, x)}\right) \\ &\qquad +\left(L(e_0,x) + \frac{1}{2}\right)\omega_2\left(f, \sqrt{L(e_1 - xe_0)^2, x)}\right) \quad (3.19) \end{aligned}$$

Teoremă 3.2.3. *Fie* $\rho(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \geq 0$. *Fie* $L : C^*_\rho[0,\infty) \to C^*_\rho[0,\infty)$ *un operator liniar şi pozitiv şi* $f \in C^*_\rho[0,\infty)$. *Pentru orice* $x \in [0,\infty)$ *avem*

$$\begin{aligned} \rho(x)|L(f,x) - f(x)| &\leq \rho(x)|f(x)| \cdot \left|\frac{L(e_0+e_2,x)}{1+x^2} - 1\right| \\ &\qquad + \left[\frac{L(e_0+e_2,x)}{1+x^2} + 1\right]\omega_1\left(\Phi(f), \sqrt{\frac{L(e_1 - xe_0)^2, x)}{(1+x^2)(1+x)^2}}\right) \quad (3.20) \\ \rho(x)|L(f,x) - f(x)| &\leq \rho(x)|f(x)| \cdot \left|\frac{L(e_0+e_2,x)}{1+x^2} - 1\right| \\ &\qquad + \sqrt{\frac{L(e_0+e_2,x)}{1+x^2}}\omega_1\left(\Phi(f), \sqrt{\frac{L(e_1 - xe_0)^2, x)}{(1+x^2)(1+x)^2}}\right) \\ &\qquad + \left[\frac{L(e_0+e_2,x)}{1+x^2} + \frac{1}{2}\right]\omega_2\left(\Phi(f), \sqrt{\frac{L(e_1 - xe_0)^2, x)}{(1+x^2)(1+x)^2}}\right) \quad (3.21) \end{aligned}$$

Observaţie 3.2.2. *Din Teorema 1.1.4 şi Teorema 1.1.8 pentru* $I = [0,\infty)$, *pentru* $h = \sqrt{L(e_1 - xe_0)^2, x)}$ *obţinem estimări similare, care pot fi obţinute înmulţinând relaţiile (3.18) şi (3.19) cu* $\rho(x)$. *Şi în acest caz, relaţiile care sunt obţinute sunt mai bune în anumite situaţii decât relaţiile (3.20) şi (3.21), pe când în alte cazuri ultimele sunt mai bune.*

3.3 Operatorul Bernstein–Chlodovsky

3.3.1 Generalităţi

În 1937, I. Chlodovsky a introdus un nou tip de operatori în [37]. Astfel, pentru $b > 0$ definim următorul operator:

$$C_n(f;x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(b \cdot \frac{x}{n}\right)\left(\frac{x}{b}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{n-k}.$$

Pentru $b = 1$, $f \in \mathcal{F}0,1]$, $x \in [0,1]$ acesta devine operatorul lui Bernstein. Operatorul Bernstein este transformat din intervalul $[0,1]$ în intervalul $[0,b]$.

Ne interesează ca b sa fie cât mai mare. Pentru obţinerea operatorului Chlodovsky–Bernstein se va aplica o tehnică de dilatare a intervalului care poate fi reprezentată în felul următor:

$$C_n(f;x) = B_n\left(f(bt), \frac{x}{b}\right).$$

Chlodovsky a utilizat această transformare pentru a aproxima funcţii definite pe $[0, \infty)$. Pentru aceasta l-a luat pe b variabil sub forma unui şir $(b_n)_n$ astfel ca $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. În plus, se presupune şi $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$. Deci operatorii Chlodovsky au următoarea formă

$$C_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(b_n \frac{k}{n}\right) \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

În următoarea teoremă avem convergenţa punctuală a acestui operator.

Teoremă 3.3.1. *[37] Dacă $f \in C[0,\infty)$ şi are loc inegalitatea*

$$|f(x)| < C \cdot e^{x^p}, \ x \geq 0. \tag{3.22}$$

unde C şi p sunt două constante arbitrare şi $x \in [0,\infty)$, iar şirul b_n verifică condiţia

$$b_n < n^{\frac{1}{p+1+\eta}} \tag{3.23}$$

unde η este ales suficient de mic atunci

$$C_n(f;x) \to f(x) \ (n \to \infty)$$

unde $x \in [0,\infty)$.

Aceasta înseamnă că definiţia lui C_n depinde de creşterea lui f. Ceea ce face ca aceşti operatori să difere de operatorii de tip Szasz–Mirakjian–Favard.

Pentru convergenţa uniformă avem următoarea teoremă

Teoremă 3.3.2. *[37] Dacă $f \in C[0,\infty)$ şi are loc relaţia*

$$\|f\|_{[0,b_n]} \cdot e^{-\alpha^2 \frac{n}{b_n}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.24}$$

unde $\alpha \neq 0$ finit, atunci şirul de polinoame $C_n(f)$ are proprietatea

$$C_n(f;x) \to f(x) \text{ când } n \to \infty$$

uniform pentru $x \in [a,b]$ pentru orice interval $[a,b] \subset (0,\infty)$.

Pentru $x \in [0, b_n]$, folosind proprietatea operatorilor Bernstein, avem

i) $C_n(e_0;x) = 1$

ii) $C_n(e_1;x) = x$

iii) $C_n(e_2;x) = x^2 + \frac{x(b_n - x)}{n}$.

iv) $|C_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{3}{2}\omega_2\left(f; \sqrt{\frac{x(b_n-x)}{n}}\right)$

3.3.2 Operatolrul α–Bernstein–Chlodovsky

În acest subcapitol, vom introduce varianta Chlodovsky a operatorului α–Bernstein care reprezintă o generalizare a operatorului α–Bernstein. Vom investiga câteva proprietăţi elementare ale acestui operator şi vom studia proprietătiile de aproximare, incluzând formula estimării asimptotice de tip Voronovskaja a aproximării operatorului.

Dintre rezultatele obţinute pentru operatorii Bernstein-Chlodovsky menţionăm Teorema de tip Voronoskaya pentru derivata variantei Kantorovich a operatorilor Bernstein–Chlodovsky, prezentaţi de Butzer şi Karsli în [24]. De asemenea, Karsli a introdus o variantă a operatorilor Chlodovsky–Kantorovich şi o variantă a operatorilor Chlodovsky-Durrmeyer în [71] şi [72]. O variantă Chlodovsky a operatorilor Szasz a fost introdusă în [119]. Pe de altă parte, q-modificarea operatorilor Bernstein-Chlodovsky a fost studiată în [70].

Rezultatele prezentate în acest subcapitol au fost cuprinse în lucrarea [116].

Proprietăţi de bază

Când $\alpha = 1$, polinomul α-Bernstein se reduce la operatorul clasic Bernstein. Definiţia noastră principală este următoarea.

Definiţie 3.3.1. *Fie $CT_{n,\alpha} : C[0,b_n) \to C[0,b_n)$ operatorii α-Chlodovsky-Bernstein, definiţi de formula*

$$CT_{n,\alpha}(f;x) := \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{b_n}{n}i\right) p_{n,i}^{\alpha}\left(\frac{x}{b_n}\right) \tag{3.25}$$

unde

$$p_{n,i}^{(\alpha)}(x) = \left[\binom{n-2}{i}(1-\alpha)x + \binom{n-2}{i-2}(1-\alpha)(1-x) + \binom{n}{i}\alpha x(1-x)\right] \cdot x^{i-1}(1-x)^{n-i-1}, \tag{3.26}$$

şi $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in C[0,\infty)$, $x \in [0,b_n]$ şi $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ este un şir pozitiv de numerele reale cu proprietăţile

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0 \tag{3.27}$$

Observaţie 3.3.1. *Pentru $\alpha \in [0,1]$ şi $n \in \mathbb{N}$, operatorul $CT_{n,\alpha}(\,\cdot\,;x)$ este pozitiv.*

Pentru familia de operatori dăm câteva dintre proprietăţile şi rezultatele lor.

Lemă 3.3.1. *Pentru toţi $n \geq 1$, independent de α:*

(i) (Interpolarea funcţiilor în capetele intervalului) Operatorul α–Chlodovsky–Bernstein pentru f interpolează f la ambele capete ale intervalului $[0,b_n]$, aşadar

$$CT_{n,\alpha}(f;0) = f(0) \quad \text{şi} \quad CT_{n,\alpha}(f;b_n) = f(b_n) \tag{3.28}$$

(ii) (Liniaritatea) Operatorul α–Chlodovsky–Bernstein este liniar, deci,

$$CT_{n,\alpha}(\lambda f + \mu g) = \lambda CT_{n,\alpha}(f) + \mu CT_{n,\alpha}(g) \tag{3.29}$$

pentru orice funcţie $f(x)$ şi $g(x)$ definiţi pe $[0,\infty)$, şi oricare λ şi μ reale.

Din Teorema 2.1. din [34] operatorul α–Chlodovsky–Bernstein poate fi exprimat astfel

Teoremă 3.3.3. *Pentru $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,b_n]$, $\alpha \in [0,1]$, $f \in C[0,\infty)$ avem*

$$CT_{n,\alpha}(f;x) = (1-\alpha)\sum_{i=0}^{n-1} g_i \binom{n-1}{i}\left(\frac{x}{b_n}\right)^i\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-i-1} + \alpha\sum_{i=0}^{n} f_i\binom{n}{i}\left(\frac{x}{b_n}\right)^i\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-i} \tag{3.30}$$

unde

$$g_i = \left(1 - \frac{i}{n-1}\right) f\left(\frac{x}{b_n} i\right) + \frac{i}{n-1} f\left(\frac{x}{b_n}(i+1)\right) \tag{3.31}$$

Vom folosi diferenţele finite de ordin superior pentru a rescrie forma operatorului şi pentru a simplifica calcularea momentelor operatorului. Avem nevoie doar de diferenţa finită de ordinul al 4-lea pentru a calcula momentul de ordin 4 al operatorului. Deci, considerăm $h = \frac{b_n}{n}$ şi funcţia polinomială de grad k $f(x) = x^k$, unde $n \geq k$. Atunci avem

$$\Delta_h^r f(0) = 0 \; pentru \; r > k \tag{3.32}$$

şi

$$\Delta_h^k f\left(\frac{b_n}{n} i\right) = \frac{b_n^k}{n^k} f^{(k)}(\xi_i) = \frac{b_n^k \cdot k!}{n^k}, \quad \xi_i \in \left(\frac{b_n \cdot i}{n}, \frac{b_n \cdot (i+k)}{n}\right) \tag{3.33}$$

Următorul rezultat se obţine uşor:

Lemă 3.3.2. *Fie* $g(i) = \left(1 - \frac{i}{n-1}\right) f\left(\frac{b_n}{n} i\right) + \frac{i}{n-1} f\left(\frac{b_n}{n}(i+1)\right), \; i \in \{0, 1, \cdots n\}$. *Avem*

$$\Delta_1^r g(i) = \left(1 - \frac{i}{n-1}\right) \Delta_1^r f\left(\frac{b_n}{n} i\right) + \frac{i+r}{n-1} \Delta_1^r f\left(\frac{b_n}{n}(i+1)\right) \tag{3.34}$$

pentru $0 \leq r \leq n$.

Acum din Teorema 3.1 ([34]), pag. 6, avem

Teoremă 3.3.4. *Operatorul α-Chlodovsky Bernstein are următoarea reprezentare în termenii de diferenţe finite*

$$CT_{n,\alpha}(f; x) = \sum_{k=0}^{n} \left[(1-\alpha)\binom{n-1}{k} \Delta_1^k g(0) + \alpha \binom{n}{k} \Delta_1^k f(0)\right] x^k \tag{3.35}$$

Teorema 3.3.4 şi Lema 3.3.2 arată că operatorul α-Chlodovsky Bernstein are proprietatea de conservare a gradului polinoamelor. În particular, pentru $f(x) = x^k$ şi $n \geq k+1$ rezultă că

$$CT_{n,\alpha}(e_k; x) = a_k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k + a_{k-1} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} + \ldots + a_1 \left(\frac{x}{b_n}\right) + a_0 \tag{3.36}$$

unde

$$a_k = (1-\alpha)\binom{n-1}{k} \Delta_1^k g(0) + \alpha \binom{n}{k} \Delta_h^k f(0) \tag{3.37}$$

Lemă 3.3.3. *Fie $CT_{n,\alpha}(f; x)$ dat de (3.25). Primele momente ale operatorului sunt*

(i) $CT_{n,\alpha}(e_0; x) = 1$

(ii) $CT_{n,\alpha}(e_1; x) = x$

(iii) $CT_{n,\alpha}(e_2; x) = x^2 + \frac{n+2(1-\alpha)}{n^2} x(b_n - x)$

(iv) $CT_{n,\alpha}(e_3; x) = x^3 + \frac{3[n+2(1-\alpha)]}{n^2} x^2(b_n - x) + \frac{n+6(1-\alpha)}{n^3} x(b_n - x)(b_n - 2x)$

(v) $CT_{n,\alpha}(e_4;x) = x^4+\frac{6[n+2(1-\alpha)]}{n^2}x^3(b_n-x)+\frac{4[n+6(1-\alpha)]}{n^3}x^2(b_n-x)(b_n-2x)+\frac{[3n(n-2)+12(n-6)(1-\alpha)]x(b_n-x)+[n+14(1}{n^4}$
$x)$

(vi) $CT_{n,\alpha}(e_1-e_0x;x) = 0;$

(vii) $CT_{n,\alpha}\left((e_1-e_0x)^2;x\right) = \frac{n+2(1-\alpha)}{n^2}(b_n-x)x$

(viii) $CT_{n,\alpha}\left((e_1-e_0x)^4;x\right) = \frac{[3n(n-2)+12(n-6)(1-\alpha)]x(b_n-x)+[n+14(1-\alpha)]}{n^4}x(b_n-x)$

unde $n \in \mathbb{N},\ x \in [0,b_n]$.

Corolar 3.3.1. *Operatorul α–Bernstein-Chlodovsky reproduce funcţiile liniare, deci*

$$CT_{n,\alpha}(ax+b;x) = ax+b \tag{3.38}$$

pentru orice numere reale a şi b.

Proprietăţi de convergenţă

Pentru rezultatul următor vom folosi Teorema 3.1.1.

Teoremă 3.3.5. *Fie $x \in [0,\infty)$, $f \in UC_b[0,\infty)$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ definiţi în (3.27) atunci pentru orice $K \subset [0,\infty)$ avem*

$$\lim_{n\to\infty} CT_{n,\alpha}(f;x) = f(x) \tag{3.39}$$

uniform în raport cu $x \in K$.

Pentru a determina gradul de aproximare, vom folosi moduli de continuitate de ordinul 1 şi 2.

Teoremă 3.3.6. *Dacă $0 \leq \alpha \leq 1$, $n \geq 1$ şi $x \in [0,b_n]$ atunci*

$$|CT_{n,\alpha}(f;x)-f(x)| \leq 2\omega_1\left(f;\sqrt{\frac{n+2(1-\alpha)}{n^2}(b_n-x)x}\right) \tag{3.40}$$

Observaţie 3.3.2. *Din Teorema 3.3.6 obţinem o formă cantitativă a Teoremei 3.3.5, pentru $K \subset [0,\infty)$ un interval compact, rezultă că*

$$x \in K\sqrt{\frac{n+2(1-\alpha)}{n^2}(b_n-x)x} \longrightarrow 0 \text{ când } n \to \infty.$$

În consecinţă avem

$$\lim_{n\to\infty} CT_{n,\alpha}(f,x) = f(x) \quad uniform \text{ pe } K \text{ pentru orice funcţie } f \in UC[0,\infty).$$

Teoremă 3.3.7. *Dacă $0 \leq \alpha \leq 1$, $n \geq 1$ şi $x \in [0,b_n]$ atunci*

$$|CT_{n,\alpha}(f;x)-f(x)| \leq \frac{3}{2}\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{n+2(1-\alpha)}{n^2}(b_n-x)x}\right) \tag{3.41}$$

O teoremă de tip Voronovskaja pentru operatorii α–Bernstein–Chlodovsky

Teoremă 3.3.8. *Fie $f \in C^2[0,\infty)$ şi $x \in [0,b_n]$. Dacă f'' este uniform continuă pe $[0,\infty)$ şi $\lim_{n\to\infty} \omega(f''; \sqrt{\frac{CT_{n,\alpha}((e_1-xe_0)^4;x)}{CT_{n,\alpha}((e_1-xe_0)^2;x)}}) = 0$, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b_n}[CT_{n,\alpha}(f;x) - f(x)] = \frac{1}{2}xf''(x). \tag{3.42}$$

uniform pe orice mulţime compactă.

Teoremă 3.3.9. *Fie $f \in C^2[0,\infty)$, $x \in [0,b_n]$ şi $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ definit în (3.27). Atunci*

$$\begin{aligned}\left|\frac{n}{b_n}\left(CT_{n,\alpha}(f;x) - f(x)\right) - \frac{1}{2}xf''(x)\right| \leq & |f''(x)|x\left|-\frac{x}{b_n} + \frac{2(1-\alpha)}{n} - \frac{2(1-\alpha)}{nb_n}x\right| \\ & + \frac{x}{2}\left(1+\frac{2(1-\alpha)}{n}\right)\tilde{\omega}_1\left(f''; \frac{1}{3}\sqrt{\frac{M_4(x)}{M_2(x)}}\right)\end{aligned}$$

unde $M_i(x) = CT_{n,\alpha}\left(|e_1 - xe_0|^i; x\right),\ i \in \mathbb{N}$

Observaţie 3.3.3. *Din Teorema 3.3.9 obţinem Teorema 3.3.5, dacă $K \subset [0,\infty)$ este un interval compact, atunci $\max_{x\in K}\sqrt{\frac{M4(x)}{M_2(x)}} \longrightarrow 0$ pentru $n \to \infty$ şi $\lim_{n\to\infty} -\frac{x}{b_n} + \frac{2(1-\alpha)}{n} - \frac{2(1-\alpha)}{nb_n}x = 0$. În consecinţă avem*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b_n}[CT_{n,\alpha}(f;x) - f(x)] = \frac{1}{2}xf''(x) \tag{3.43}$$

uniform pe K pentru orice compact $K \subset [0,\infty)$ dacă $f \in C^2[0,\infty),\ x \in K$.

În continuare vom prezenta operatorii cei mai reprezentativi în aproximarea ponderată împreună cu proprietăţile lor remarcabile:

3.4 Operatorii Szasz–Favard–Mirakjian

Definiţie 3.4.1. *[81] Operatorii Szasz–Mirakjian pot fi definiţi astfel $S_n : C_2^*[0,\infty) \to C[0,\infty)$*

$$S_n(f;x) = e^{-nx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right). \tag{3.44}$$

unde $f \in \mathcal{F}[0,\infty)$ este ales astfel încât seria să fie convergentă.

Teoremă 3.4.1. *[105] Dacă $f \in C_\rho^*[0,\infty)$, unde $\rho(x) = e^{-x}$, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;x) = f(x) \ \ uniform\ pe\ [0,\infty).$$

Teoremă 3.4.2. *[5] Operatorii Mirakjian–Favard–Szasz au următoarele proprietăţi:*

1)

$$\begin{aligned}&S_n(e_0;x) = 1;\\&S_n(e_1;x) = x;\\&S_n(e_2;x) = x^2 + \frac{x}{n}\text{unde } x \geq 0.\end{aligned}$$

2) Pentru $f \in C_2^*[0,\infty)$, $\lim_{n\to\infty} S_n f = f$ *uniform pentru orice compact* $[a,b]$, $b > 0$ *şi*

$$|S_n(f;x) - f(x)| \le 2\omega\left(f, \sqrt{\frac{x}{n}}\right),\ x \in K.$$

3) Pentru orice f *derivabilă pe* $[0,\infty)$ *astfel încât* $f' \in C_b[0,\infty)$ *avem*

$$|S_n(f;x) - f(x)| \le 2 \cdot \sqrt{\frac{x}{n}}\omega\left(f', \sqrt{\frac{x}{n}}\right),\ x \ge 0.$$

Teoremă 3.4.3. *[5] Dacă* S_n, $n \ge 1$ *sunt definiţi prin (3.44) atunci*

1) $S_n^{(r)}(f;x) = n^r e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \Delta_{\frac{1}{n}}^r f\left(\frac{k}{n}\right), \quad r \in \mathbb{N}.$

2) Pentru $b > 0, (\forall) x \in [0,b]$, $(\forall) f \in C^{r+1}[0,\infty)$ *astfel încât* $f^{(r+1)}$ *este mărginită pe* $[0,\infty)$ *are loc*

$$|S_n^{(r)}(f;x) - f^{(r)}(x)| \le \frac{r}{n}\|f^{(r+1)}\| + \frac{1}{\sqrt{n}} K_{n,r}\omega\left(f^{(r+1)}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

unde $\|\cdot\|$ *reprezintă norma supremum pe* $[0,b]$ *şi* $K_{n,r} = \sqrt{2b + \frac{2r^2}{n}} + b + \frac{r^2}{n\sqrt{n}}$.

Pentru aproximarea uniformă ne vom situa în spaţiul $C_b[0,\infty)$. Fie funcţia pondere φ, $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $x \ge 0$; utilizăm modul de netezime

$$\omega_{2,\varphi}(f,\delta) = \sup_{0<h\le\delta} \|\Delta_{h\varphi}^2 f\|.$$

V. Totik [123] a demonstrat următoarea teoremă:

Teoremă 3.4.4. *Pentru* $f \in C_b[0,\infty)$ *următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) $S_n f - f = o(1)$ $(n \to \infty)$.

2) $\omega_{2,\varphi}(f,\delta) = o(1)$ $(\delta \to 0^+)$.

3) $f(x + h\sqrt{x}) - f(x) = o(1)$ $(h \to 0^+)$ *uniform pe* $[0,\infty)$.

4) $f \circ e_2$ *este uniform continuă.*

Vom arata că se pot aplica rezultatele din Secţiunea 3.2. la operatori Szasz-Favard-Mirakjian. Aceste rezultate au fost obţinute în lucrarea [94]. Fie funcţia $\psi(t) = \frac{t}{1-t}$, $t \in [0,1)$.

Teoremă 3.4.5. *[94] Pentru* $\rho(x) = 1$, $x \in [0,\infty)$ *şi* $f \in C_\rho^*[0,\infty)$, *are loc:*

$$|S_n(f,x) - f(x)| \le 2\omega_1\left(f \circ \psi, \sqrt{\frac{x}{n(1+x)^2}}\right),\ x \in [0,\infty),\ n \in \mathbb{N}, \tag{3.45}$$

$$\|S_n f - f\| \le 2\omega_1\left(f \circ \psi, \frac{1}{2\sqrt{n}}\right),\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.46}$$

Corolar 3.4.1. *Dacă* $f \in C_{e_0}^*[0,\infty)$ *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\| = 0$$

Teoremă 3.4.6. *[94] Pentru $\rho(x) = e_0$, $f \in C^*_\rho[0,\infty)$, şi $x \in [0,\infty)$ are loc:*

$$|S_n(f,x) - f(x)| \leq 2\omega_1\left(f, \sqrt{\frac{x}{n}}\right), \tag{3.47}$$

$$|S_n(f,x) - f(x)| \leq \frac{3}{2}\omega_2\left(f, \sqrt{\frac{x}{n}}\right). \tag{3.48}$$

Observaţie 3.4.1. *Din relaţiile (3.47) şi (3.48) nu putem obţine Corolarul 3.4.1. Putem obţinem convergenţa uniformă a lui $S_n f$ la f pe mulţimi compacte din $[0,\infty)$. Mai mult, nicio altă alegere a argumentului $h = h_n(x) > 0$ în Teorema 1.1.4 şi Teorema 1.1.8, pentru $L = S_n$ nu conduce la Corolarul 3.4.1.*

Observaţie 3.4.2. *Corolarul 3.4.1 poate fi obţinut şi în alt mod. Este uşor de arătat că dacă $f \in C^*_{e_0}[0,\infty)$, atunci $f \circ e_2 \in C^*_{e_0}[0,\infty)$. De asemenea, este uşor de arătat că toate funcţiile din spaţiul $C^*_{e_0}[0,\infty)$ sunt uniform continue. Atunci putem aplica următoarea Teorema 3.4.3.*

Considerăm acum ponderea $\rho(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \geq 0$.

Teoremă 3.4.7. *[94] Fie $\rho(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in [0,\infty)$ şi fie funcţia $\Phi : C^*_\rho[0,\infty) \to C[0,1]$, definită în (3.11). Pentru $f \in C^*_\rho[0,\infty)$, $x \in [0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ are loc:*

$$\begin{aligned}\rho(x)|S_n(f,x) - f(x)| \leq\ & \frac{x}{n(1+x^2)}|\rho(x)f(x)| \\ & + \left(2 + \frac{x}{n(1+x^2)}\right)\omega_1\left(\Phi(f), \sqrt{\frac{x}{n(1+x)^2(1+x^2)}}\right),\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\|S_n f - f\|_\rho \leq \frac{1}{2n}\|f\|_\rho + \left(2 + \frac{1}{2n}\right)\omega_1\left(\Phi(f), \frac{\sqrt{1781}}{100\sqrt{n}}\right). \tag{3.50}$$

Corolar 3.4.2. *Dacă $\rho(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [0,\infty)$ şi $f \in C^*_\rho[0,\infty)$ atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_\rho = 0$$

Teoremă 3.4.8. *[94] Fie $\rho(x) = e_0/(e_0 + e_2)$. Pentru orice $f \in C^*_\rho[0,\infty)$ şi $x \in [0,\infty)$ are loc:*

$$\rho(x)|S_n(f,x) - f(x)| \leq \frac{1+x}{1+x^2}\omega_1\Big(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\Big), \tag{3.51}$$

$$\rho(x)|S_n(f,x) - f(x)| \leq \frac{2+x}{2(1+x^2)}\omega_2\Big(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\Big),. \tag{3.52}$$

În consecinţă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem

$$\|S_n f - f\|\rho \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}\omega_1\Big(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\Big), \tag{3.53}$$

$$\rho(x)||S_n f - f||_\rho \leq \frac{\sqrt{2}}{4}\omega_2\Big(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\Big). \tag{3.54}$$

Observaţie 3.4.3. *[94] Din relaţia (3.53) sau relaţia (3.54) şi Teorema 3.4.4 deducem Corolarul 3.4.2. În altă ordine de cuvinte Corolarul 3.4.2 poate fi demonstrat prin Teorema 1.1.4 sau Teorema 1.1.8. Aşadar în cazul ponderii $\rho = e_0/(e_0 + e_2)$ este o situaţie diferită faţă de cea din cazul ponderii $\rho = e_0$, vezi Observaţia 3.4.1*

3.5 Operatorul Baskakov

Definiţie 3.5.1. *[18] Se numesc operatorii Baskakov operatorii $V_n : C_2^*[0,\infty) \to C[0,\infty)$ daţi de următoarea relaţie:*

$$BA_n(f;x) = (1+x)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3.55}$$

Teoremă 3.5.1. *[5] Operatorii Baskakov au următoarele proprietăţi:*

1) $BA_n(e_0;x) = 1,\quad BA_n(e_1;x) = x,\quad BA_n(e_2;x) = x^2 + \frac{x(1+x)}{n},\ x \geq 0.$

2) *Pentru orice* $f \in C_2^2[0,\infty),\ \lim_{n\to\infty} BA_n f = f$ *uniform pe orice compact* $[0,b],\ b > 0$ *şi*

$$|BA_n(f;x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f, \sqrt{\frac{x(1+x)}{n}}\right),\ x \in [0,b].$$

3) *Pentru orice* f *diferenţiabilă pe* $[0,\infty)$ *astfel încât* $f' \in C_b[0,\infty)$

$$|BA_n(f;x) - f(x)| \leq 2\sqrt{\frac{x(1+x)}{n}}\,\omega\left(f', \sqrt{\frac{x(1+x)}{n}}\right),\ x \geq 0.$$

Teoremă 3.5.2. *[5] Au loc:*

(i) *Dacă* f *este convexă pe* $[0,\infty)$ *atunci pentru orice* $n \in \mathbb{N},\ x > 0,\ BA_n(f,x) > BA_{n+1}(f;x)$.

(ii) *Dacă* f *este concavă pe* $[0,\infty)$ *atunci orice* $n \in \mathbb{N},\ x > 0,\ BA_n(f,x) < V_{n+1}(f;x)$.

În continuare prezentăm rezultatele obţinute în lucrarea [94], prin aplicarea rezultatelor generale din sectiunea 3.2 la operatorii lui Baskakov.

Teoremă 3.5.3. *[94] Fie funcţia* ψ *definită în (3.9). Fie* $\rho = e_0$ *şi* $f \in C_\rho^*[0,\infty)$. *Pentru* $x \geq 0$ *şi* $n \in \mathbb{N}$ *au loc relaţiile:*

$$|BA_n(f,x) - f(x)| \leq 2\omega_1\left(f\circ\psi, \sqrt{\frac{x}{n(1+x)}}\right), \tag{3.56}$$

$$|BA_n(f,x) - f(x)| \leq \omega_1\left(f\circ\psi, \sqrt{\frac{x}{n(1+x)}}\right) + \frac{3}{2}\omega_2\left(f\circ\psi, \sqrt{\frac{x}{n(1+x)}}\right), \tag{3.57}$$

$$|BA_n(f,x) - f(x)| \leq 2\omega_1\left(f, \sqrt{\frac{x(1+x)}{n}}\right), \tag{3.58}$$

$$|BA_n(f,x) - f(x)| \leq \frac{3}{2}\omega_2\left(f, \sqrt{\frac{x(1+x)}{n}}\right). \tag{3.59}$$

Din relaţiile (3.56) şi (3.56) obţinem:

Corolar 3.5.1. *[94] Fie* $\rho = e_0$ *şi* $f \in C_\rho^*[0,\infty)$. *Pentru* $n \in \mathbb{N}$ *are loc:*

$$\|BA_n f - f\| \leq 2\omega_1\left(f\circ\psi, \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{3.60}$$

$$\|BA_n f - f\| \leq \frac{3}{2}\omega_2\left(f\circ\psi, \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{3.61}$$

În consecinţă

$$\lim_{n\to\infty} \|BA_n f - f\| = 0. \tag{3.62}$$

Vom considera acum ponderea $\rho(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \geq 0$.

Teoremă 3.5.4. *[94] Fie $\rho = e_0/(e_0 + e_2)$ şi funcţia $\Phi : C_\rho^*[0,\infty) \to C[0,1]$ definită în (3.11), pentru orice $f \in C_\rho^*[0,\infty)$, orice $x \geq 0$ şi $n \in \mathbb{N}$ au loc:*

$$\begin{aligned}\rho(x)|BA_n(f,x) - f(x)| &\leq \frac{x(x+1)}{n(x^2+1)}\rho(x)|f(x)| \\ &+ \left(2 + \frac{x(x+1)}{n(x^2+1)}\right) \cdot \omega_1\left(\Phi(f), \sqrt{\frac{x}{n(x^2+1)(x+1)}}\right),\end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}\rho(x)|BA_n(f,x) - f(x)| &\leq \frac{x(x+1)}{n(x^2+1)}|\rho(x)f(x)| \\ &+ \sqrt{\frac{x(x+1)}{n(x^2+1)}}\omega_1\left(\Phi(f), \sqrt{\frac{x}{n(x^2+1)(x+1)}}\right) \\ &+ \left(\frac{3}{2} + \frac{x(x+1)}{n(x^2+1)}\right) \cdot \omega_2\left(\Phi(f), \sqrt{\frac{x}{n(x^2+1)(x+1)}}\right),\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\rho(x)|BA_n(f,x) - f(x)| \leq \frac{1+x+x^2}{1+x^2}\omega_1\Big(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\Big), \tag{3.65}$$

$$\rho(x)|BA_n(f,x) - f(x)| \leq \frac{2+x+x^2}{2(1+x^2)}\omega_2\Big(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\Big), \tag{3.66}$$

Corolar 3.5.2. *[94] Fie $\rho = e_0/(e_0 + e_2)$ şi $f \in C_\rho^*[0,\infty)$. Pentru $n \in \mathbb{N}$ are loc:*

$$|BA - nf - f\|_\rho \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}\|f\|_\rho + \frac{1+\sqrt{2}}{2}\omega_1\left(\Phi(f), \sqrt{\frac{277}{1000n}}\right), \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}|BA - nf - f\|_\rho &\leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}\|f\|_\rho + \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\omega_1\left(\Phi(f), \sqrt{\frac{277}{1000n}}\right) \\ &+ \Big(\frac{3}{2} + \frac{1+\sqrt{2}}{2n}\Big)\omega_2\left(\Phi(f), \sqrt{\frac{277}{1000n}}\right),\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$|BA_n f - f\|_\rho \leq \frac{3}{2}\omega_1\Big(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\Big), \tag{3.69}$$

$$|BA_n f - f\|_\rho \leq \frac{1104}{1000}\omega_2\Big(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\Big). \tag{3.70}$$

În consecinţă

$$\lim_{n\to\infty} \|BA_n f - f\|_\rho = 0. \tag{3.71}$$

Capitolul 4

Semigrupuri de operatori

Vom prezenta câteva rezultate privitoare la aproximarea semigrupurilor. Rezultatele obţinute unidimensional le vom extinde şi multidimensional şi le vom aplica în cazul mai multe tipuri de operatori.

4.1 Noţiuni introductive

În cadrul acestei secţiuni vom ilustra succint câteva dintre noţiunile cele mai reprezentative din cadrul teoriei semigrupurilor de operatori şi generalizarea teoremelor fundamentale ale acestora.

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu Banach. Notăm cu $B(X)$ spaţiul operatorilor liniari şi mărginiţi $T : X \to X$, înzestrat cu norma $\|T\| = \sup_{x \in X,\, \|x\|=1} \|Tx\|$, $T \in B(X)$.

Definiţie 4.1.1. *[126] O familie de operatori* $\{T(t), t \geq 0\}, T(t) \in B(x)$ *se numeşte semigrup de operatori pe* X *dacă*

$$T(0) = I;$$
$$T(t+s) = T(t)T(s)$$

oricare $t, s \in [0, \infty)$.

Definiţie 4.1.2. *[126] Dacă semigrupul de operatori* $\{T(t), t \geq 0\}$ *verifică condiţia*

$$\lim_{t \to 0+} ||T(t) - I|| = 0$$

atunci $\{T(t), t \geq 0\}$ *se numeşte semigrup de operatori uniform continuu.*

Teoremă 4.1.1. *[126] Putem face următoarele observaţii:*

1. *Dacă* $\{T(t), t \geq 0\}$ *este un semigrup uniform continuu, atunci există* $\omega \geq 0$ *şi* $M \geq 1$*, astfel încât:*

$$||T(t)|| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

2. *Dacă* $\{T(t), t \geq 0\}$ *este un semigrup uniform continuu, atunci, pentru oricare* $s > 0$ *vom avea*

$$\lim_{t \to s} ||T(t) - T(s)|| = 0$$

Teoremă 4.1.2. *[126] Dacă $\{T(t), t \geq 0\}$ este un semigrup uniform continuu pe X, atunci există $A \in B(X)$ astfel încât $T(t) = e^{tA}, t \geq 0$, unde $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$, unde $A^k = A \circ \cdots \circ A$ (de k ori).*

Deoarece semigrupurile uniform continue sunt complet determinate prin teorema precedentă, ele prezintă un interes mai limitat.
Acum vom considera o clasă mai largă de semigrupuri de operatori.

Definiţie 4.1.3. *Fie $\{T(t), t \geq 0\}$, $T(t) \in B(X)$. Un semigrup de operatori $\{T(t), t \geq 0\}$ se numeşte C_0 semigrup de operatori dacă*

$$\lim_{t \to 0+} T(t)x = x, \ (\forall) x \in X$$

în sensul normei lui X.

Se poate observa că orice semigrup uniform continuu este în acelaşi timp şi un C_0 semigrup.
Prezentăm în continuare câteva proprietăţi ale C_0 semigrupurilor de operatori.

Teoremă 4.1.3. *[126] Fie $T(t)$ un C_0 semigrup de operatori pe X. Atunci există limita*

$$\omega_0 = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln ||T(t)||}{t} \in [-\infty, +\infty)$$

Pentru fiecare număr $w > \omega_0$ există o constantă $M \geq 1$ astfel încât:

$$||T(t)|| \leq M e^{wt}, t \geq 0.$$

Corolar 4.1.1. *[126] Fie $\{T(t), t \geq 0\}$ un C_0 semigrup şi fie $x \in X$. Atunci aplicaţia $t \to T(t)x$ între $[0, \infty)$ şi X este continuă.*

Definiţie 4.1.4. *[126] Un C_0 semigrup $\{T(t), t \geq 0\}$ se va numi grup mărginit dacă există $M \geq 1$ astfel încât $||T(t)|| \leq M, t \geq 0$; $\{T(t), t \geq 0\}$ se va numi semigrup de contracţii dacă $||T(t)|| \leq 1, t \geq 0$.*

Fie operatorul liniar $A : D(A) \subset X \to X$, unde

$$D(A) = \left\{ x \in X : (\exists) \lim_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t} \in X \right\}$$

şi unde limita de mai sus este considerată în sensul normei lui X.
Pentru oricare $x \in D(A)$ vom considera

$$Ax = \lim_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t}$$

Putem observa că pentru $x \in D(A)$, aplicaţia $t \to T(t)x$ este derivabilă la dreapta în 0, iar derivata este egală Ax.
Operatorul liniar A definit mai sus se numeşte *generatorul infinitezimal* al grupului $\{T(t), t \geq 0\}$.

Teoremă 4.1.4. *[126] Fie $\{T(t), t \geq 0\}$ un C_0 semigrup pe X şi fie A generatorul său infinitezimal*

1. *Dacă* $x \in X$, *atunci avem*

$$\int_0^t T(s)xds \in D(A)$$
$$A\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x,\ t \geq 0$$

2. *Pentru* $x \in D(A)$ *are loc* $T(t)x \in D(A)$ *şi*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax,\ t \geq 0$$

3. *Dacă* $x \in D(A)$ *atunci*

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds = \int_0^t AT(s)xds,\ t \geq 0$$

Teoremă 4.1.5. *[126] Fie* A *generatorul infinitezimal al unui* C_0 *semigrup* $\{T(t), t \geq 0\}$ *de operatori pe spaţiul Banach* X. *Atunci* $D(A)$ *este dens în* X, *iar* A *este operator închis.*

Teoremă 4.1.6. *[126] Dacă* C_0 *semigrupurile* $T(t)$ *şi* $S(t)$ *au acelaşi generator infinitezimal* A, *atunci* $T(t) = S(t),\ t \geq 0$.

Fie $\omega_0 = \inf \{w \in \mathbb{R} : (\exists) M \geq 1, \text{ astfel încât } ||T(t)|| \leq Me^{wt},\ t \geq 0\}$.

Teoremă 4.1.7. *[126] Fie scalarul* $\lambda \in \mathbb{C}$ *astfel încât* $Re\lambda > \omega_0$. *Atunci* λ *este valoarea regulată pentru* A, *adică există operatorul* $(\lambda I - A)^{-1} \in B(X)$. *Mai mult, operatorul bijectiv, liniar şi mărginit* $(\lambda I - A)^{-1} : X \to D(A)$ *poate fi descris prin formula:*

$$(\lambda I - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt,\ x \in X.$$

Dacă $\lambda \in \mathbb{C}$ este valoare regulată, notăm:

$$R(\lambda : A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt,\ x \in X.$$

Teoremă 4.1.8. *[126] Dacă avem semigrupul de operatori* $\{T(t), t \geq 0\}$ *având generatorul* A *şi* $\lambda \in \mathbb{C}$ *verifică condiţia* $Re\lambda > \omega_0$ *atunci este valoare regulată şi*

$$R(\lambda : A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt,\ x \in X$$

şi

$$||R(\lambda : A)|| \leq \frac{1}{Re\lambda}.$$

Teoremă 4.1.9. *[126] Fie* A *generatorul infinitezimal al unui* C_0 *semigrup de contracţii şi fie* λ *real,* $\lambda > 0$. *Atunci:*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x,\ x \in X.$$

4.2 Teorema lui Trotter

Trotter [124] a demonstrat că un semigrup de operatori poate fi generat prin trecere la limită a iteratelor unui operator.
O variantă a acestui rezultat este prezentat în următoarea teoremă.

Teoremă 4.2.1. *[124] Fie $(X, ||\cdot||)$ un spaţiu Banach şi fie $(L_n)_{n\geq 1}$ un şir de operatori liniari mărginiţi pe X. Mai mult, considerăm un şir numere reale pozitive $(\rho(n))_{n\geq 1}$astfel încât* $\lim_{n\to 0}\rho(n) = 0$. *Presupunem că există $M \geq 1$ şi $\omega \in \mathbb{R}$ astfel încât*

$$||L_n^k|| \leq Me^{\omega\rho(n)k} \tag{4.1}$$

pentru orice $k, n \geq 1$.
Fie $(A, D(A))$ un operator liniar pe X definit ca

$$A(f) := \lim_{n\to\infty}\frac{L_n(f) - f}{\rho(n)}, \tag{4.2}$$

pentru orice $f \in D(A)$, unde

$$D(A) := \left\{g \in X|(\exists)\lim_{n\to\infty}\frac{L_n(g) - g}{\rho(n)}\right\}. \tag{4.3}$$

Presupunem că

(a) $D(A)$ este densă pe X.

(b) rangul $(\lambda I - A)(D(A))$ este dens în X pentru $\lambda > \omega$.
Atunci există închiderea operatorului $(A, D(A))$ este închis şi închiderea lui este generatorul C_0 al unui semigrup $(T(t))_{t\geq 0}$, care are proprietatea ca pentru orice şir $(k(n))_{n\geq 1}$ de numere naturale satisfăcând $\lim_{n\to\infty} k(n)\rho(n) = t$ *avem*

$$T(t)(f) = \lim_{n\to\infty} L_n^{k(n)}(f) \tag{4.4}$$

pentru orice $f \in X$.
În plus, $||T(t)|| \leq M\exp^{\omega t}$ pentru orice $t \geq 0$.

4.3 Iteratele operatorului Bernstein şi semigrupul generat de acesta

În acest subcapitol ne vom ocupa de studiul iteratele operatorului Bernstein. Vom începe prin prezentarea proprietăţiilor ale acestora.

Iteratele operatorului Bernstein au fost studiate încă din anul 1960. Cele mai semnificante articole pe care le amintim sunt [114], [74], [73], [85], [115], [57] şi [56]. Anumite generalizări au fost date mai târziu de către Altomare în articolele [8], [9] şi [10]. Dintre articolele cele mai recente amintim [86]. Există şi studii ale comportamentului iteratelor lui Bernstein prezentate dintr-un punct de vedere cantitativ după cum vom putea observa în continuare.

Notăm cu $B_n,\ n \in \mathbb{N}$, operatorul Bernstein de rang n dat de relaţia

$$B_n(f, x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

unde $f \in C[0,1]$ şi $x \in [0,1]$.

Definim inductiv puterile lui B_n

$$B_n^0 := Id,\ B_n^1 := B_n\ \cdots\ B_n^{m+1} := B_n \circ B_n^m,\ m \in \mathbb{N}$$

Avem:

$$B_1(f,x) = (1-x)f(0) + xf(1).$$

În 1967, Kelinsky şi Rivlin [74] au demonstrat următoarea teoremă:

Teoremă 4.3.1. *[74] Pentru orice funcţie $f \in C[0,1]$ şi orice $n \in \mathbb{N}$ avem*

$$\lim_{m\to\infty} ||B_n^m(t) - B_n(f)|| = 0.$$

Printre alte demonstraţii date acestui rezultat menţionăm demonstraţia bazată pe principiul contracţiei dat de I. Rus [104].
Un rezultat mai puternic decât Teorema 4.3.1 l-au dat Karlin şi Ziegert [73]

Teoremă 4.3.2. *[73] Fie un şir de numere naturale $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

(i) Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = 0$, atunci $\lim_{n\to\infty} ||B_n^{m_n} f - f|| = 0,\ f \in C[0,1]$.

(ii) Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = \infty$, atunci $\lim_{n\to\infty} ||B_n^{m_n} f - B_1 f|| = 0,\ f \in C[0,1]$.

Estimări cantitative ale limitelor din Teorema 4.3.2 au fost date de H. Gonska în felul următor:

Teoremă 4.3.3. *[57] Pentru $m,\ n \in \mathbb{N},\ f \in C[0,1]$ şi modulul de ordinul 2 clasic ω_2 au loc următoarele:*

(i) $|B_n^m(f,x) - f(x)| \leq 4 \cdot \omega_2\left(f, \sqrt{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right] \cdot x(1-x)}\right)$

(ii) $|B_n^m(f,x) - B_1(f,x)| \leq 4 \cdot \omega_2\left(f, \sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \cdot x(1-x)}\right)$

Mai general decât rezultatul expus în Teorema 4.3.2, se poate obţine folosind teorema lui Trotter următorul rezultat a lui S. Cooper şi S. Waldron:

Teoremă 4.3.4. *[38] Există un semigrup de operatori $\{T(t), t \geq 0\}$, $T(t) : C[0,1] \to C[0,1]$, asfel că pentru orice $t \geq 0$ şi orice şir de numere naturale $(m_n)_n$, cu proprietatea $\frac{m_n}{n} \to t$, avem*

$$\lim_{n\to\infty} B_n^{m_n} f = T(t)f, \quad (\forall) f \in C[0,1]. \tag{4.5}$$

O estimare cantitativă a acestui rezultat a fost obţinut de H. Gonska şi I. Raşa în modul următor:

Teoremă 4.3.5. *[61] Există o constantă c independentă de $f \in C[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ şi $t \geq 0$ astfel că pentru orice şir $(m_n)_n$, $m_n \in \mathbb{N}$ astfel ca*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = t \geq 0 \ \text{și}\ \delta_n = \max\left\{|\frac{m_n}{n} - t|, \frac{1}{n}\right\} \leq 1$$

are loc

$$||B_n^{m_n} f - T(t)f|| \leq C\left\{\omega_4\left(f, \delta_n^{\frac{1}{4}}\right) + \delta_n^{\frac{1}{2}}\omega_2\left(f, \delta_n^{\frac{1}{4}}\right)\right\}$$

unde

$$T(t)(f, x) = B_1(f, x) + x(1-x)\int_0^1 G_t(x, y)(f - B_1 f)(y)dy$$

iar nucleul G_t *este dat de*

$$G_t(x, y) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(2k-1)}{k-1} e^{-\frac{1}{2}k(k-1)t} \cdot p_{k-2}^{(1,1)}(2x-1) \cdot p_{k-2}^{(1,1)}(2y-1).$$

Aici $p_{k-2}^{(1,1)}(x)$, $-1 \leq x \leq 1$ *este polinomul lui Jacobi de parametru* $(1,1)$ *pe intervalul* $[-1,1]$ *normalizat cu valoarea* $k-1$ *în* $x = 1$.

4.4 Estimări cantitative pentru aproximarea semigrupurilor de operatori–cazul unidimensional

4.4.1 Estimări cantitative pentru limita semigrupurilor de operatori pozitivi

În acest capitol vom da o estimare cantitativă generală pentru aproximarea iteraţiilor operatorilor liniar şi pozitivi care conservă constantele la limita semigrupului definit de aceste iteraţii.

Rezultate importante ale semigrupurile de operatori generate de iteraţiile operatorului Bernstein au fost date în [74], [115], [61], [36], [80].

Pentru semigrupurile generate alţi operatori liniari şi pozitivi, citām [114], [14], [73], [79], [62]. În ultimele decenii s-au considerat aplicaţii ale teoremei lui Trotter pentru semigrupurile de operatori generaţi de iteratele unor operatori liniari şi pozitivi. Pentru o referinţă generală pentru semigrupurile de operatori citām [10] şi [29]. O versiune cantitativă a teoremei lui Trotter pentru semigrupul generat de operatorii Bernstein a fost prima dată obţinută de către Gonska şi Raşa [61]. În lucrarea lui Minea [80] această metoda a fost îmbunătăţită şi aplicată la operatori generali care conservă funcţiile liniare.

Scopul acestei secţiuni este de a prezenta mai multe estimări generale ale Teoremei lui Trotter în cazul operatorilor liniari şi pozitivi care conservă doar constantele. Drept aplicaţie vom considera operatorii Durrmeyer. Rezultatele au fost publicate in lucrarea [117].

Considerăm următorul şir de operatori liniari şi pozitivi $(L_n)_n$, $L_n : C[0,1] \to C[0,1]$, astfel încât $L_n(e_0) = e_0$. Notăm:

$$m_n^k(x) := L_n((t-x)^k, x), \quad k, n \in \mathbb{N}, \ x \in [0,1].$$
$$M_n^k(x) := L_n(|t-x|^k, x), \quad k, n \in \mathbb{N}, \ x \in [0,1].$$

Presupunem că exită funcţii $\varphi_1, \varphi_2, \psi_n^1, \psi_n^2 \in C[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, asfel încât

$$m_n^1(x) = \frac{1}{n}\varphi_1(x) + \psi_n^1(x), \ x \in [0,1], \ n \in \mathbb{N}, \tag{4.6}$$

$$m_n^2(x) = \frac{1}{n}\varphi_2(x) + \psi_n^2(x), \ x \in [0,1], \ n \in \mathbb{N}, \tag{4.7}$$

unde

$$\|\psi_n^j\| = o\Big(\frac{1}{n}\Big),\ j = 1,2,\ (n \to \infty). \tag{4.8}$$

Presupunem că operatorii L_n sunt convecşi de ordin i, $i \geq 0$, adică operatori cu proprietatea ca pentru orice funcţie $f \in C^i[0,1]$, $f^{(i)} \geq 0$, avem $(L_n(f))^{(i)} \geq 0$. Presupunem, de asemenea, că

$$m_n^4(x) = o(m_n^2(x)),\ x \in [0,1],\ (n \to \infty). \tag{4.9}$$

Atunci, Teorema lui Voronovskaya asigură că

$$\lim_{n\to\infty}(L_n(f,x) - f(x)) = f'(x)\varphi_1(x) + \frac{1}{2}\varphi_2(x)f''(x). \tag{4.10}$$

şi limita este uniform în raport cu $x \in [0,1]$, pentru $f \in C^2[0,1]$.

Fie operatorul diferenţial $A : C^2[0,1] \to C[0,1]$, dat de $A(f)(x) = \varphi_1(x)f'(x) + \frac{1}{2}\varphi_2(x)f''(x)$, $f \in C^2[0,1]$, $x \in [0,1]$. Atunci domeniul $D(A) = C^2[0,1]$ al operatorului A este dens în $C[0,1]$.

Teorema lui Trotter asigură că există C_0 semigrup $T(t)$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} L_n^{m_n} f = T(t)f, f \in C[0,1] \tag{4.11}$$

dacă $\frac{m_n}{n} \to t,\ t \geq 0$.

Lemă 4.4.1. *Pentru fiecare $g \in C^4[0,1]$, avem*

$$\left\|L_n g - g - \frac{1}{n}Ag\right\| \leq \frac{1}{6}||M_n^3||\ ||g^{(3)}|| + \|\psi_n^1\|\cdot\|g'\| + \frac{1}{2}\|\psi_n^2\|\cdot\|g''\|.$$

Lemă 4.4.2. *Pentru orice $g \in C^4[0,1]$, avem:*

$$\begin{aligned}\left\|T\left(\frac{1}{n}\right)g - g - \frac{1}{n}Ag\right\| \quad \leq \quad & \frac{1}{4n^2}\|2\varphi_1\varphi_1' + \varphi_2\varphi_1''\|\cdot\|g'\| \\ & + \frac{1}{8n^2}\|4\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2' + 4\varphi_2\varphi_1' + \varphi_2\varphi_2''\|\cdot\|g''\| \\ & + \frac{1}{4n^2}\|2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2\varphi_2'\|\cdot\|g^{(3)}\| + \frac{1}{8n^2}\|\varphi_2^2\|\cdot\|g^{(4)}\|.\end{aligned}$$

Dacă $(L_n)_n$ este un şir de operatori liniari şi pozitivi care sunt convecşi de orice ordin, atunci ei păstrează gradul polinoamelor. Prin urmare, $(L_n e_k)^{(k)} \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}_0$. Notăm

$$\sigma_k = \frac{1}{k!}\left(L_n e_k\right)^{(k)} \tag{4.12}$$

În [80] este demonstrată următoarea lemă.

Lemă 4.4.3. *Dacă $(L_n)_n$ este un şir de operatori liniari şi pozitivi care sunt convecşi de orice ordin şi dacă $f \in C^k[0,1],\ k \geq 0$ atunci:*

$$||(L_n^j)^{(k)}|| \leq (\sigma_k)^j||f^{(k)}||,\ j \geq 0.$$

unde σ_k este definită în (4.12).

Acum, rezultatul principal al acestui capitol este dat de următoarea teoremă.

Teoremă 4.4.1. *Fie un şir de operatori liniari şi pozitivi* $(L_n)_n$, $L_n : C[0,1] \to C[0,1]$, *care sunt convecsi de orice ordin. Fie* $f \in C^4[0,1]$. *Următoarea estimare are loc:*

$$\begin{aligned}
||L_n^m f - T(t)f|| \quad \leq \quad & \frac{1-\sigma_1^m}{1-\sigma_1}\|f'\| \left(\|\psi_n^1\| + \frac{1}{4n^2}\|2\varphi_1\varphi_1' + \varphi_2\varphi_1''\| \right) \\
& + \frac{1-\sigma_2^m}{1-\sigma_2}\|f''\| \left(\frac{1}{2}\|\psi_n^2\| + \frac{1}{8n^2}\|4\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2' + 4\varphi_2\varphi_1' + \varphi_2\varphi_2''\| \right) \\
& + \frac{1-\sigma_3^m}{1-\sigma_3}\|f^{(3)}\| \left(\frac{1}{6}||\tilde{M}_n^3\| + \frac{1}{4n^2}\|2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2\varphi_2'\| \right) \\
& + \frac{1-\sigma_4^m}{1-\sigma_4}\frac{1}{8n^2}\|f^{(4)}\|\|\varphi_2^2\| \\
& + \left| \frac{m}{n} - t \right| \left(\|\varphi_1\| \cdot ||f'|| + \frac{1}{2}\|\varphi_2\| \cdot ||f''|| \right), \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

unde σ_k *este definită în (4.12).*

4.4.2 Aplicaţie: Operatorii Durrmeyer

Operatori Durrmeyer $D_n : L_1[0,1] \to C[0,1]$ sunt definiţi astfel

$$(D_n f)(x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \int_0^1 p_{n,k}(t)f(t)dt,$$

unde $p_{n,k}(x) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$, $k = 0, 1, \cdots,$ $x \in [0.1]$. Aceşti operatori sunt convecşi $i \geq 0$. Adică dacă $f \in C^i[0,1]$ şi $f^{(i)} \geq 0$ pe $[0,1]$, atunci $(D_n(f))^{(i)} \geq 0$ pe $[0,1]$.

Avem (din [43]):

$$\begin{aligned}
m_n^1(x) &= \frac{1-2x}{n+2} \\
m_n^2(x) &= \frac{(2n-6)x(1-x)+2}{(n+2)(n+3)} \\
m_n^4(x) &= O\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ uniform în raport cu } x \in [0,1],
\end{aligned}$$

Folosind notaţiile (4.6) şi (4.7) se obţin relaţiile:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x) = 1-2x, \quad \psi_n^1(x) = \frac{2(2x-1)}{n(n+2)} \\
&\varphi_2(x) = 2x(1-x), \quad \psi_n^2(x) = -\frac{x(1-x)}{n(n+2)(n+3)} + \frac{2}{(n+2)(n+3)}.
\end{aligned}$$

Aşadar,

$$\|\psi_n^1\| \leq \frac{2}{n(n+2)} \leq \frac{2}{n^2}, \quad \|\psi_n^2\| \leq \frac{2}{(n+2)(n+3)} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Din [43] rezultă, folosind notaţia dată în (4.12)

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{n}{n+2}\\ \sigma_2 &= \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)}\\ \sigma_3 &= \frac{n(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+3)(n+4)}\\ \sigma_4 &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}.\end{aligned}$$

Observăm că $\sigma_k < 1$, $k = 1, 2, 3, 4$. Rezultă

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\sigma_1} &= \frac{n+2}{(n+2)-n} \leq \frac{3}{2}n\\ \frac{1}{1-\sigma_2} &= \frac{(n+2)(n+3)}{(n+2)(n+3)-n(n-1)} \leq n\\ \frac{1}{1-\sigma_3} &= \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{(n+2)(n+3)(n+4)-n(n-1)(n-2)} \leq n\\ \frac{1}{1-\sigma_4} &= \frac{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)-n(n-1)(n-2)(n-3)} \leq n.\end{aligned}$$

Cum $2\varphi_1(x)\varphi_1'(x) + \varphi_2(x)\varphi_1''(x) = -4(1-2x)$ deducem

$$\|\psi_n^1\| + \frac{1}{4n^2}\|2\varphi_1\varphi_1' + \varphi_2\varphi_1''\| \leq \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{3}{n^2}.$$

Cum $4\varphi_1^2(x) + 2\varphi_1(x)\varphi_2'(x) + 4\varphi_2(x)\varphi_1'(x) + \varphi_2(x)\varphi_2''(x) = 8 - 56x(1-x)$ deducem

$$\frac{1}{2}\|\psi_n^2\| + \frac{1}{8n^2}\|4\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2' + 4\varphi_2\varphi_1' + \varphi_2\varphi_2''\| \leq \frac{2}{n^2}.$$

Avem $2\varphi_1(x)\varphi_2(x) + \varphi_2(x)\varphi_2'(x) = 8x(1-x)(1-2x)$. De asemenea $M_n^3(x) \leq \sqrt{m_n^2(x)m_n^4(x)}$ şi $m_n^2(x) \leq \frac{n+1}{2(n+2}n+3)$ şi $m_n^4(x) \leq \frac{2}{n^2}$. Deducem

$$\frac{1}{6}||M_n^3\| + \frac{1}{4n^2}\|2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2\varphi_2'\| \leq \frac{1}{3n\sqrt{n}} + \frac{1}{2n^2}.$$

Cum $\varphi_2^2(x) = 4x^2(1-x)^2$ deducem

$$\frac{1}{8n^2}\|f^{(4)}\|\|\varphi_2^2\| \leq \frac{1}{32n^2}.$$

În final $\|\varphi_1\| \leq 1$ şi $\frac{1}{2}\|\varphi_2\| \leq \frac{1}{4}$.

Folosind Teorema 4.4.1 şi rezultatele de mai sus obţinem, a fost obţinută următoarea estimare.

Teoremă 4.4.2. *Pentru orice $f \in C^4[0,1]$ şi orice $0 \leq m \leq n$ avem*

$$\begin{aligned}||D_n^m f - T(t)f|| \leq\ & \frac{9}{2n}\|f'\| + \frac{2}{n}\|f''\|\\ & + \left(\frac{1}{3\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right)\|f^{(3)}\| + \frac{1}{32n}\|f^{(4)}\|\\ & + \left|\frac{m}{n} - t\right|\left(\|f'\| + \frac{1}{4}\|f''\|\right).\end{aligned}$$

4.5 Rezultate cantitative pentru semigrupurile de operatori generate de operatori Bernstein multidimensionali

Drept bibliografie a temei acestei secţiuni amintim următoarele referinţe ([30]), ([111]), ([84]), ([10]), ([47]), ([11]) şi ([6]).

Iteratele şi semigrupurile generate de operatorii Bernstein au fost studiate în [74], [115], [61], [31], [32], [36], [80]. Semigrupurile generate de operatorii multidimensionali Bernstein au fost considerate în [31], [32], [79]. Pentru limitele grupului generate de alţi operatori liniari şi pozitivi cităm [114], [14],[73], [79], [62], [117].

Rezultate din această secţiune au fost obţinute în lucrarea [96].

4.5.1 Rezultate auxiliare pentru operatorii Bernstein multidimensionali

Pentru a defini operatorii multidimensionali Bernstein vom considera următoarele notaţii.

Considerăm $d \in \mathbb{N}$ fixat.

Pentru a uşura notaţia multi–indicilor $\overline{k} \in \mathbb{N}_0^d$, $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ notăm $|\overline{k}| = k_1 + \ldots + k_d$ şi $\overline{k}! = k_1! \ldots k_d!$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, dacă $\overline{k} \in \mathbb{N}_0^d$, $|\overline{k}| \le n$ putem defini $\binom{n}{k} = \frac{n!}{\overline{k}!(n-|\overline{k}|)!}$.

Definim d-simplexul

$$\Delta_d := \{\overline{x} = (x_1, \ldots, x_d) |\ x_i \ge 0,\ (1 \le i \le d),\ x_1 + \ldots + x_d \le 1\}. \tag{4.14}$$

Vectorii $\overline{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $(1 \le i \le d)$ formează baza standard a spaţiului $\mathbb{R}^d$. Dacă $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \Delta_d$ luăm $|\overline{x}| = x_1 + \ldots + x_d$. Deci $|\overline{x}| \le 1$. Dacă în plus, considerăm $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \Lambda_d^n$, atunci definim $\overline{x}^{\overline{k}} = x_1^{k_1} \ldots x_d^{k_d}$.

Cu notaţiile de mai sus avem:

Definiţie 4.5.1. *Se numeşte operatorul Bernstein pe simplex Δ_d, operatorul definit prin următoarea formulă*

$$B_n(f, \overline{x}) := \sum_{|\overline{k}| \in \Lambda_d^n} p_{n,\overline{k}}(\overline{x}) f\left(\frac{\overline{k}}{n}\right), \tag{4.15}$$

unde

$$p_{n,\overline{k}}(\overline{x}) := \binom{n}{k} \overline{x}^{\overline{k}} (1 - |\overline{x}|)^{n-|\overline{k}|}. \tag{4.16}$$

cu $\overline{k} \in \mathbb{Z}^d$ astfel încât

$$p_{n,\overline{k}}(\overline{x}) := 0, \quad \textit{if}\ \exists i,\ \textit{astfel încât}\ \ k_i < 0,\ \textit{sau}\ |\overline{k}| > n. \tag{4.17}$$

iar $\frac{\overline{k}}{n} = \left(\frac{k_1}{n}, \ldots \frac{k_d}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $f : \Delta_d \to \mathbb{R}$, $\overline{x} \in \Delta_d$.

În cazul $d = 1$ şi $\overline{k} = k$, $\overline{x} = x$ vom avea cazul unidimensional şi vom nota mai simplu $p_{n,k}(x)$ în locul $p_{n,\overline{k}}(\overline{x})$.

Fie $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$. Presupunem $|\alpha| \ge 1$, unde $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$. Dacă $f \in C^{|\alpha|}(\Delta_d)$ definim

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial \overline{x}^\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}. \tag{4.18}$$

Dacă $|\alpha| = 0$, definim $\frac{\partial^\alpha f}{\partial \overline{x}^\alpha} := f$.

Pentru $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ notăm prin $C^\alpha(\Delta_d)$, spaţiul funcţiilor $f : \Delta_d \to \mathbb{R}$ care au derivată parţială $\frac{\partial^\alpha f}{\partial \overline{x}^\alpha}$ continuă pe Δ_d. Pentru $1 \leq i \leq d$ considerăm funcţiile $\pi_i : \Delta_d \to \mathbb{R}$, $\pi_i(\overline{x}) = x_i$.

Lemă 4.5.1. *Pentru $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \Delta_d$ avem*

i) $B_n(\pi_i - x_i, \overline{x}) = 0$, $(1 \leq i \leq d)$;

ii) $B_n((\pi_i - x_i)(\pi_j - x_j), \overline{x}) = -\frac{x_i x_j}{n}$, $(1 \leq i \neq j \leq d)$;

iii) $B_n((\pi_i - x_i)^2, \overline{x}) = \frac{x_i(1-x_i)}{n}$, $(1 \leq i \leq d)$;

iv) $B_n((\pi_i - x_i)^3, \overline{x}) = \frac{x_i(1-x_i)(1-2x_i)}{n^2}$, $(1 \leq i \leq d)$;

v) $B_n((\pi_i - x_i)^2(\pi_j - x_j), \overline{x}) = \frac{x_i x_j(2x_i-1)}{n^2}$; $(1 \leq i, j \leq d,\ i \neq j)$;

vi) $B_n((\pi_i - x_i)(\pi_j - x_j)(\pi_m - x_m), \overline{x}) = \frac{2x_i x_j x_m}{n^2}$, $(1 \leq i, j \neq m \leq d,\ i, j, m$ *diferiţi*$)$.

Teoremă 4.5.1. *Fie $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \geq 1$. Atunci pentru orice $f \in C^{|\alpha|}(\Delta_d)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq |\alpha|$ şi $\overline{x} \in \Delta_d$ avem*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha}{\partial \overline{x}^\alpha} B_n(f, \overline{x}) &= \frac{n!}{(n-|\alpha|)!} \sum_{|\overline{k}| \leq n-|\alpha|} p_{n-|\alpha|, \overline{k}}(\overline{x}) \times \\ &\times \iint \ldots \int_{\left[0, \frac{1}{n}\right]^{|\alpha|}} \frac{\partial^\alpha}{\partial \overline{t}^\alpha} f\Big(\frac{\overline{k}}{n} + \sum_{i \in I_\alpha} \Big(\sum_{j=1}^{\alpha_i} t_{i,j}\Big)\overline{e}_i\Big) d\overline{t}_\alpha, \end{aligned} \tag{4.19}$$

unde $I_\alpha = \{i \in \{1, \ldots, d\} |\ \alpha_i \geq 1\}$ şi

$$d\overline{t}_\alpha = \prod_{i \in I_\alpha} \prod_{j=1}^{\alpha_i} dt_{i,j}.$$

În cazul $|\alpha| = 0$, termenul $\iint \ldots \int_{\left[0, \frac{1}{n}\right]^{|\alpha|}} \frac{\partial^\alpha}{\partial \overline{t}^\alpha} f\Big(\frac{\overline{k}}{n} + \sum_{i \in I_\alpha} \Big(\sum_{j=1}^{\alpha_i} t_{i,j}\Big)\overline{e}_i\Big) d\overline{t}_\alpha$ este redus la $f\left(\frac{\overline{k}}{n}\right)$.

Fie $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Notăm

$$K^\alpha(\Delta_d) = \left\{ f \in C^\alpha(\Delta_d) |\ \frac{\partial^\alpha f}{\partial \overline{x}^\alpha}(\overline{x}) \geq 0,\ (\overline{x} \in \Delta_d) \right\}. \tag{4.20}$$

Următoarele corolarii sunt imediate.

Corolar 4.5.1. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem*

$$B_n(K^\alpha(\Delta)) \subset K^\alpha(\Delta_d). \tag{4.21}$$

Fie $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Dacă $f \in C^\alpha(\Delta_d)$ notăm $\left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial \overline{x}^\alpha} \right\| = \max_{\overline{x} \in \Delta_d} \left| \frac{\partial^\alpha f}{\partial \overline{x}^\alpha}(\overline{x}) \right|$.

Corolar 4.5.2. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, oricare $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ şi oricare $f \in C^\alpha(\Delta_d)$ avem*

$$\left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial \overline{x}^\alpha} B_n(f) \right\| \leq \frac{n!}{(n-|\alpha|)!\, n^{|\alpha|}} \left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial \overline{x}^\alpha} \right\|. \tag{4.22}$$

Prin inducţie obţinem

Corolar 4.5.3. *Pentru oricare* $n \in \mathbb{N}$*, oricare* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$*, oricare* $j \in \mathbb{N}_0$ *şi oricare* $f \in C^\alpha(\Delta_d)$ *avem*

$$\left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial \overline{x}^\alpha}(B_n)^j(f) \right\| \leq \left(\frac{n!}{(n-|\alpha|)!\, n^{|\alpha|}} \right)^j \left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial \overline{x}^\alpha} \right\|. \tag{4.23}$$

Observaţie 4.5.1. Pentru $|\alpha| \geq 2$ rezultă

$$\frac{n!}{(n-|\alpha|)!\, n^{|\alpha|}} \leq \frac{n!}{(n-2)!\, n^2} = \frac{n-1}{n}.$$

Pentru $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\Delta_d)$ definim

$$\mu_k(f) := \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d,\ |\alpha|=k} \left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial \overline{x}^\alpha} \right\|. \tag{4.24}$$

Corolar 4.5.4. *Pentru oricare* $n \in \mathbb{N}$*, oricare* $j \in \mathbb{N}_0$*, oricare* $k \in \mathbb{N}$*,* $k \geq 2$*, şi oricare* $f \in C^k(\Delta)$ *avem*

$$\mu_k((B_n)^j(f)) \leq \left(\frac{n-1}{n} \right)^j \mu_k(f). \tag{4.25}$$

Corolar 4.5.5. *Avem* $B_n(\Pi_m) \subset \Pi_m$ $m \geq 0$*, unde* Π_m *este o mulţime de polinoame cu* d*, variabilele având gradul cel mai mare* m*.*

4.5.2 O estimare cantitativă a teoremei lui Trotter

Considerăm operatorul

$$Af(\overline{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f(\overline{x})}{\partial x_i^2} x_i(1-x_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq d} \frac{\partial^2 f(\overline{x})}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j,\ f \in C^2(\Delta_d). \tag{4.26}$$

Următoare lemă este de fapt Teorema Voronovskaja pentru operatorii Bernstein pe simplex

Lemă 4.5.2.

$$\lim_{n \to \infty} n(B_n(f, \overline{x}) - f(\overline{x})) = Af(\overline{x}),\ f \in C^2(\Delta_d).$$

Dacă în Teorema **??** facem alegerile $L_n = B_n$, $E = C(\Delta_d)$, $D_0 = C^2(\Delta_d)$, $A_0 = A$ şi $E_i = \Pi_i$, $i \geq 0$, unde Π_i este spaţiul polinoamelor cu graul i şi folosim Corolarul 4.5.5, rezultă că există un semigrup de operatori liniari şi mărginiţi $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, $T(t) : C(\Delta_d) \to C(\Delta_d)$, astfel încât

$$\lim_{n \to \infty} B_n^{m_n}(f) = T(t),\ t \geq 0,$$

pentru orice şir de numere naturale $(m_n)_n$ astfel încât $\frac{m_n}{n} = t$.

Lemă 4.5.3. *Pentru* $g \in C^4(\Delta_d)$ *avem*

$$\left\| B_n(g) - g - \frac{1}{n} Ag \right\| \leq \frac{C_d^1}{n^2} \mu_3(g), \tag{4.27}$$

unde

$$C_d^1 = \frac{1}{3} d^3 - \frac{1}{2} d^2 + \frac{1}{3} d. \tag{4.28}$$

şi $\mu_3(g)$ *este definit în (4.24).*

Lemă 4.5.4. *Pentru orice* $g \in C^4(\Delta_d)$ *şi* $t \geq 0$ *avem*

$$\|T(t)g - g - tAg\| \quad \leq \quad \frac{t^2}{2} \sum_{k=2}^{4} C_d^k \mu_k(g),$$

unde

$$C_d^2 = \frac{1}{2}d^2,\ C_d^3 = d^3 - d^2 + \frac{1}{2}d,\ C_d^4 = \frac{1}{4}d^4 \tag{4.29}$$

şi $\mu_k(g)$, $k = 2, 3.4$ *sunt definite în (4.24).*

Rezultatul principal este următorul.

Teoremă 4.5.2. *Pentru* $f \in C^4(\Delta_d)$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ *avem*

$$\|(B_n)^m f - T(t)f\| \leq \quad \left|\frac{m}{n} - t\right| \cdot \frac{d^2}{2}\mu_2(f) + \frac{1}{n}\Big[C_d^1 \mu_3(f) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{4} C_d^k \mu_k(f)\Big], \tag{4.30}$$

unde C_d^k, $k = 1, 2, 3, 4$ *sunt daţi în (4.28) şi (4.29).*

În final, comparăm rezultatul nostru cu alte două rezultate obţinute anterior.

Observaţie 4.5.2. O versiune cantitativă a Teoremei lui Trotter pentru semigrupurile de operatori generate de operatori lui Bernstein definiţi pe simplex Δ_d a fost obţinută de Campiti şi Tacelli [31], [32], pentru funcţii aparţinând spaţiului $C^{2,\alpha}(\Delta_d)$, cu $0 < \alpha < 1$. Spaţiul $C^{2,\alpha}(\Delta_d)$ constând în funcţii reale f definite pe Δ_d, care admit derivata de ordinul 2 pe Δ_d şi penru care următoarea condiţie

$$\sup_{\substack{x,y \in \Delta_d \\ x \neq y}} \frac{1}{\|x-y\|^\alpha} \sum_{i,j=1}^{d} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(y) \right| < \infty$$

este satisfăcută. În [31], în Teorema 2.3, completat în [32], următoarea estimare este demontrată în:

$$\|T(t)f - (B_n)^{k(n)}f\| \leq \frac{t\psi(f)}{n^{\alpha/(4+\alpha)}} + \left(\left|\frac{k(n)}{n} - t\right| + \frac{\sqrt{k(n)}}{n}\right)\left(\|Af\| + \frac{\psi(f)}{n^{\alpha/(4+\alpha)}}\right), \tag{4.31}$$

pentru orice $t \geq 0$, $f \in C^{2,\alpha}(\Delta_d)$ şi şirul de numere pozitive $(k(n))_{n\geq 1}$, unde $\psi(f)$ depinde doar de f. Pe de altă parte relaţia (4.30) pentru m, înlocuind $k(n)$ este de forma

$$\|T(t)f - (B_n)^{k(n)}f\| \leq C_1(f)\left|\frac{k(n)}{n} - t\right| + C_2(f)\frac{1}{n},\ t \geq 0,\ f \in C^4(\Delta_d). \tag{4.32}$$

Prima remarcă este că în ipoteza $k(n)/n \to t$, $(n \to \infty)$, are un domeniu de aplicabilitate mai mare decât relaţia (4.31), deoarece este validă pe spaţiul mai mare $C^{2,\alpha}(\Delta_d)$ decât spaţiul $C^4(\Delta_d)$.

În cazul când $f \in C^4(\Delta_d)$, pentru a face o comparaţie între cele două rezultate să fixăm şi să notăm $\beta = \frac{\alpha}{4(\alpha+1)} \in (0, 1/8)$. Putem face comparaţia în două cazuri.

Dacă $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{k(n)}{n} - t\right| n^\beta \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$, atunci cele două estimări au acelaşi ordin de convergenţă la 0, fiind $\mathrm{O}\left(\left|\frac{k(n)}{n} - t\right|\right)$,

În cazul când $\left|\frac{k(n)}{n} - t\right| = \mathrm{o}\left(n^{-\beta}\right)$ $(n \to \infty)$ atunci relaţia (4.32), i.e. (4.30) este mai puternică decât relaţia (4.31).

Bibliografie

[1] U. Abel, H. Siebert: *An improvement of the constant in Videnskiĭ's inequality for Bernstein polynomials*, Georgian Math. J. **27**, no. 1, 1-7 (2018)

[2] J. A. Adell, J. Bustamante, J. M. Quesada: Estimates for the moments of Bernstein polynomials, J. Math. Anal. Appl. **432**, 114-128 (2015)

[3] J. A. Adell, D. Cárdenas-Morales: *Quantitative generalized Voronovskajas formulae for Bernstein polynomials*, J. Approx. Theory **231**, 41-52 (2018)

[4] J. A. Adell, D. Cárdenas–Morales: *On the 10th central moment of the Bernstein polynomials*, Results Math. **74**, no. 3, article 113 (2019)

[5] O. Agratini: *Aproximare prin operatori liniari*, Presa Universitară Clujeană (2000)

[6] F. Altomare: *Iterates of Markov operators and constructive approximation of semi-groups*, Constr. Math. Anal. **2**, 22-39 (2019)

[7] F. Altomare: *Korovkin-type theorems and approximation by positive linear operators*, Surv. Approx. Theory **5**, 92–164 (electronic only) (2010)

[8] F. Altomare: *Limit semigroup of Bernstein-Schnabl operators associated with positive projections*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV, Ser. **16**, no. 2, 259 – 279 (1989)

[9] F. Altomare: *Positive projections, approximation processes and degenerate diffusion equations*, Conf. Semin. Mat. Univ. Bari, 237–244, 57–82 (1991)

[10] F. Altomare, M. Campiti: *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*, Walter de Gruyter, Berlin (1994)

[11] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, V. Leonessa, I. Raşa: *Markov Operators, Positive Semigroups and Approximation Processes*, De Gruyter Studies in Mathematics, 61, Walter de Gruyter, Berlin/Boston (2014)

[12] F. Altomare, S. Diomede: *Positive operators and approximation in function spaces on completely regular spaces*, Int. J. Math. Math. Sci. **61**, 3841–3871 (2003)

[13] N.T. Amanov: *On the uniform weighted approximation by Szasz–Mirakjan operators*, Anal. Math. **18**, 167–184 (1992)

[14] A. Attalienti: *Generalized Bernstein-Durrmeyer operators and the associate limit semigoup*, J. Approx. Theory **99**, 289-309 (1999)

[15] F. Altomare, S. Diomede: *Positive operators and approximation in function spaces on completely regular spaces*, Int. J. Math. Math. Sci. **61**, 3841–3871 (2003)

[16] O. Aramă: *Properties concerning the monotony of sequence of polynomials of S. Bernstein(in Romanian)*, Acad. Repub. Popul. Romine, Fil. Cluj, Inst. Calcul, Studii Cerc. Mat. 8, 195-208 (1958)

[17] C. Balázs, J. Szabados: *Approximation by Bernstein type rational functions*, II, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **40**. no. 3–4, 331–3374 (1982)

[18] V.A. Baskakov: *An example of sequence of linear positive operators in the space of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **113**, 249–251 (1957)

[19] M. Becker: *Global approximation theorems for Szasz–Mirakjian and Baskakov operators in polynomial weight spaces*, Indiana, Univ. Math. J. **27**, no. 1, 127–142 (1978)

[20] S. N. Bernstein: *Complément á l'article de E. Voronoskaja: Determination de la forme asymptotique de l'approximation des fonctions par des polynômes de M. Bernstein*, CR Dokl. Acad. Sci. URSS **A4**, 86–92 (1932)

[21] H. Bohman: *On approximation of continuous and analytic functions*, Ark. Mat. **2**, 43–56 (1952)

[22] B.D. Boyanov, V.M. Veselinov: *A note on the approximation of functions in an infinite interval by linear positive operators*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (NS) **14(62)**, no. 1, 9-13 (1970)

[23] Yu.A. Brudnyyi: *On a certain method of approximation of bounded functions, given on a segment (Russian)*, In Studies in Contemporary Problems in Constructive Thery of Functions, (Proc. Second All–Union Conf Baku 1962, ed. by I. I. Ibragimov), Baku: Izdat, Akad, Nauk Azerbaidzan, 40–45 (1965)

[24] P.L. Butzer, H. Karsli: *Voronovskaya-type theorems for derivatives of the Bernstein-Chlodovsky polynomials and the Szasz Mirakyan operator*, Comment. Math. **49**, no. 1, 33–58 (2009)

[25] J. Bustamante, L. Morales De La Cruz: *Pozitive linear operators and continuous functions on unbounded intervals*, Jaen J. Aprox. **1**, no. 2, 145-173 (2009)

[26] J. Bustamante, L. Morales de la Cruz: *Korovkin type theorems for weighted approximation*, Int. J. Math. Anal. **1**, no. 26, 1273–1283 (2007)

[27] J. Bustamente, J. M. Quesada, L. Morales de la Cruz: *Direct estimate for positive linear operators in polynomial weighted spaces*, J. Approx. Theory **162**, 14951508 (2010)

[28] M. Becker: *Global approximation theorems for Szász–Mirakjian and Baskakov operators in polynomials weight spaces*, Indiana Math. J. **27**, 127–142 (1978)

[29] P. Butzer, H. Berens: *Semi-groups of Operators and Approximation*, Springer, Berlin (1967)

[30] P.L. Butzer, H. Berens: *Semi-groups of Operators and Approximation Theory*, Springer, Berlin, New York (1967)

[31] M. Campiti, C. Tacelli: *Rate of convergence in Trotter's approximation theorem*, Constr. Approx. **28**, 333–341 (2008)

[32] M. Campiti, C. Tacelli: *Rate of convergence in Trotter's approximation theorem*, Constructive Approximation **31**, 459–462 (2010)

[33] D. Cárdenas-Morales: On the constants in Videnskiĭ type inequalities for Bernstein operators, Results Math. **72**, 1437-1448 (2017)

[34] X. Chen, J. Tan, Z. Liu, J. Xie: *Approximation of functions by a new family of generalized Bernstein operators*, J. Math. Anal. Appl. **450**, 244−261 (2017)

[35] W. Chen: *On the modified Bernstein–Dürrmeyer operator*, Report of the Fifth Chinese Conference of Approximation Theory, Zhen Zhou, China (1985)

[36] E.W. Cheney, A. Sharma: *Bernstein power series*, Canadian J. Math. **16**, 241-252 (1964)

[37] I. Chlodovsky: *Sur le dévélopment des fonctions définies dans un intervalle infini en séries de polynómes de M. S. Bernstein*, Moscow, Compos. Math. **4**, 380–393 (1937)

[38] S. Cooper, S. Waldron: *The eigenstructure of the Bernstein operator*, J. Approx. Theory, **105**, 133–165 (2000)

[39] T. Coşkun: *Weighted approximation for unbounded continuous functions by sequence of positive linear operators*, Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **110**, no. 4, 357–362 (2000)

[40] R. DeVore: *The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators*, Springer–Verlag, Berlin (1972)

[41] R. DeVore: *Optimal convergence of positive linear operators*, in Proceedings of the Conference on Constructive Theory of Functions, Publishing house of Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 101–119 (1972)

[42] R.A. DeVore, G.G. Lorentz: *Constructive Approximation*, Springer, New York (1993)

[43] M.M. Dierrennic: *Sur I'approximation de fonctions intégrables sur* $[0,1]$ *par des polynômes de Bernstein modifies*, J. Approx. Theory **31**, 325-343 (1981)

[44] W. Dickmeis, R.J. Nessel: *Classical approximation processes in connection with Lax equivalence theorems with orders*, Acta Sci. Math. (Szeged) **40**, 33–48 (1978)

[45] Z. Ditzian: *Convergence of sequences of linear positive operators: remarks and applications*, J. Approx. Theory **14**, 296–301 (1975)

[46] O. Dôgru: *On weighted approximation of continuous functions by linear operators un on an infinte interval*, Math. Cluj. **41(64)**, no. 1, 39–46 (1999)

[47] K.J. Engel, R. Nagel: *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 194, Springer-Verlag, New York, (2000)

[48] C.G. Esseen: *Über die asymptotisch beste Approximation stetiger Functionen, mit Hilfe von Bernstein–Polynomen*, Numer. Math **2**, 206–213 (1960)

[49] Z. Finta: *On converse approximation theorems*, J. Math. Anal. Appl. **312**, 159–180 (2005)

[50] A. D. Gadzhiev: *K–positive linear operators in the space of regular functions and theorems of Korovkin type*, Fzv. Akad. Nauk. Az. SSR., Ser. Fiz. –Mat. Tekhn, Nauk, No.5, 49–53 (1974)

[51] A.D. Gadzhiev: *Theoremes of Korovkin type*, Mat. Zametki, **20**, no. 5, 781–786, 995–998(In English) (1976)

[52] A. D. Gadzhiev: *The convergence problem for sequence of linear and positive operators on unbounded sets and theorems analogous to that of P.P.Korovkin*, Dokl. Akad. Nauk, SSSR **218**, no.5, 1001–1004,1433–1436 (1974)

[53] A.D. Gadzhiev, A. Aral: *The estimates of approximation by using a new type of weighted modulus of continuity*, Comp. Math. Appl. **54**, 127–135 (2004)

[54] H.H. Gonska: *On approximation by linear operators: Improved estimates*, Anal. Numér, Théor. Approx. **14**, 7–32 (1985)

[55] H.H. Gonska: *On the degree of approximation in Voronovskaja's theorem*, Studia Univ. Babes–Bolyai, Math. **52**, no. 3, 103-115 (2007)

[56] H. Gonska: *On Mamedov estimates for the approximation of finitely defined operators*, in: Approximation Theory III (Proc. Int. Sympos.Austin 1980, ed. by E. W. Cheney), Acad. Press (New York), 443–448 (1980)

[57] H. Gonska: *Quantitative Aussagen zur Approximation durch positive lineare Operatoren*, Dissertation, Univ. Duisburg (1979)

[58] H.H. Gonska, R. K. Kovacheva: *The second order modulus revisited: remarks, applications, problems*, Conf. Sem. Mat. Univ. Bari **257**, 1-32 (1994)

[59] H.H. Gonska: *Quantitative Korovkin type theorems on simultaneous approximation*, Math. Z. **186**, 419–433 (1984)

[60] H.H. Gonska, D. Kacsó, I. Raşa: *On genuine Bernstein–Durrmeyer operators*, Results Math. **50**, 213–225 (2007)

[61] H. Gonska, I. Raşa: *The limiting semigroup of the Bernstein iterates: degree of convergence*, Acta Math. Hungar. **111**, 119–130 (2006)

[62] H. Gonska, M. Heilmann, I. Raşa: *Convergence of iterates of genuine and ultraspherical Durrmeyer operators to the limiting semigroup: C2-estimates*, J. Approx. Theory, **160**, 243–255 (2009)

[63] H. Gonska, I. Raşa: *Remarks on Voronovskaja's theorem*, Gen. Math. **16**, 87-99 (2008)

[64] T.N.T. Goodman, A. Sharma: *A modified Bernstein–Durrmeyer I_n:* Bl. Sendov et al,(eds.) Proceedings of the Conference on Constructive Theory of Functions, Varna 1987, 166–173. Publ. House Bulg. Acad. of Sci., Sofia (1988)

[65] T.N.T. Goodman, A. Sharma: *A Bernstein operator on the simplex*, Math. Balkanica(N.S.) **5**, 129–145 (1991)

[66] A. Holhoş: *Quantitative estimates for positive linear operators in weighted spaces*, Gen. Math. **16**, no. 4, 99-111 (2008)

[67] A. Holhoş: *The rate of approximation of functions in an infinite interval by positive linear operators*, Studia Univ. "Babeş–Bolyai", Math. **55**, no. 2, 133–142 (2010)

[68] E. Ibikli: *Approximation by Bernstein-Chlodowsky polynomials*, Hacet. J. Math. Stat. **32**, 1–5 (2003).

[69] Jia–ding Cao: *On a linear approximation methods(in chinese)*, Acta Sci. Natur. Univ. Fudon **9**, 43–52 (1964)

[70] H. Karsli, V. Gupta: *Some approximation properties of q–Chlodowsky operators*, Appl. Math. Comput. **195**, no. 1, 220–229 (2008)

[71] H. Karsli, P. Pych-Taberska: *On the rates of convergence of Chlodovsky-Kantorovich operators and their Bézier variant*, Comment. Math. **49**, no. 2, 189–208 (2009)

[72] H. Karsli, P. Pych–Taberska: *On the rates of convergence of Chlodovsky–Durrmeyer operators and their Bézier variant*, Georgian Math. J. **16**, no. 4, 693–704 (2009)

[73] S. Karlin, Z. Zieger: *Iteration of positive approximation operators*, J. Approx. Theory **3**, 310–339 (1970)

[74] R.P. Kelinsky, T.J. Rivlin: *Iterates of Bernstein polynomials*, Pacific J. Math. **21**, 511–520 (1967)

[75] H. Knoop, P. Pottinger: *Ein Satz vom Korovkin–Typ für C^k–Räume*, Math. Z. **148**, 23–32 (1976)

[76] P.P. Korovkin: *On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions(in Russian)*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **90**, 961–964 (1953)

[77] A.J. Lopez–Moreno: *Weighted simultaneous approximation with Baskakov type operators*, Acta. Math. Hungar. **104**, no. 1–2, 143–151 (2003)

[78] R.G. Mamedov: *On the asymptotic value of the approximation of repeatedly dierentiable functions by positive linear operators (Russian)*, Dokl. Akad. Nauk **146** ,1013–1016. Translated in Soviet Math. Dokl. **3**, 1435–1439 (1962)

[79] E. Mangino, I. Raşa: *A quantitative version of Trotters theorem*, J. Approx. Theory **146**, 149–156 (2007)

[80] B. Minea: *On quantitatve estimation for the limiting semigroup of linear positive operators*, Bull. Transilv. Univ. Braşov Ser. III, **6(55)**, no. 1, 31–36 (2013)

[81] G.M. Mirakjian: *Approximation of continuous functions with the aid of polynomials(Russian)*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **31**, 201–205 (1941)

[82] B. Mond: *Note: On the degree approximation by linear pozitive operators*, J. Approx. Theory **1**8, 304–306 (1976)

[83] M. Mursaleen, Khursheed J. Ansari, Asif Khan: *On (p, q)-analogue of Bernstein operators (revised)*, arXiv:1503.07404v2, (2015)

[84] R. Nagel: *One-parameter Semigroups and Positive Operators*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin (1986)

[85] R. Nagel: *Sätze Korovkinschen Typs für die Approximation linearer positive Operatoren*, Dissertation, Univ. Essen (1978)

[86] S. Ostrovska: *q-Bernstein polynomials and their iterates*, J. Approx. Theory **123**, 232–255 (2003)

[87] R. Păltănea: *Approximation Theory Using Positive Linear Operators*, Birkhäuser, Boston (2004)

[88] R. Păltănea: *Asymptotic constant in approximation of twice differentiable functions by a class of positive linear operators*, Results Math. **73**, no. 2, article 64 (2018)

[89] R. Păltănea: *Estimates for general positive linear operators on non-compact interval using weighted moduli of continuity*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. **56**, no. 2, 497-504 (2011)

[90] R. Păltănea: *New second order moduli of continuity, In: Approximation and optimization*, (Proc. Int. Conf. Approximation and Optimization, Cluj-Napoca 1996; ed. by D.D. Stancu et al.), vol I, Transilvania Press, Cluj-Napoca, 327–334 (1997)

[91] R. Păltănea: *Optimal estimates with moduli of continuity*, Results Math. **32**, 318-331 (1997)

[92] R. Păltănea: *Optimal constant in approximation by Bernstein operators,* J. Comput. Analysis Appl. **6**, no. 2, Kluwer Academic, 195–235 (2003)

[93] R. Păltănea: *On some constants in approximation by Bernstein operators*, Gen. Math. **16**, no. 4, 137–148 (2008)

[94] **R. Păltănea, M. Smuc: *General estimates of the weighted approximation on interval* $[0, \infty)$ *using moduli of continuity*, Bull. Transilv. Univ. Braşov Ser. III 8(57), no. 2, 93-108 (2015)** - 3 citări ISI

[95] **R. Păltănea, M. Smuc: *Sharp estimates of asymptotic error of approximation by general positive linear operators in terms of the first and the second moduli of continuity*, Results Math. 74, Article 70 (2019)** – 2 citări ISI

[96] **R. Păltănea, M. Smuc: *Quantitative results for the limiting semigroup generated by the multidimensional Bernstein operators*, Semigroup Forum 102, 235-249 (2021)**

[97] **R. Păltănea, M. Smuc: *A new class of Bernstein-type operators obtained by iteration* - Trimisă spre publicare la Studia Mat. Univ. Babes Bolyai.**

[98] T. Popoviciu: *Les fonctions convexes*, Herman&Cie, Paris (1944)

[99] T. Popoviciu: *On the Best Approximation of Continuous Functions by Polynomials(in Romanian)*, Inst. Arte. Grafice Ardealul, Cluj (1937)

[100] T.Popoviciu: *On the proof of Weierstrass theorem using interpolation polynomials(in Romanian*, Lucrările Ses. Gen. St. Acad. Române din 1950, 1–4(1950), tradus în engleză de D. Kasćo, East J. Aprox. **4**, no. 1, 107–110 (1998)

[101] T. Popviciu: *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre superior*, Mathematica(Cluj) **10**, 49–54 (1935)

[102] I. Raşa: *Feller semigroups, elliptic operators and Altomare projections*, Rend. Circ. Mat. Palerno Suppl. II, **68**, 133–155

[103] I. Raşa: *Semigroup associated to Mache operators*, in: Advanced Problems in Constructive Approximation, M.D. Buhman and D.H. Mache (Eds.) Int. Series Num. Math. Vol. 142, Birkhauser Verlag (Basel), 143–152 (2002)

[104] I. A. Rus: *Iterates of Bernstein operators, via contraction principle*, IEEE J. Math. Anal. Appl., **292**, 259–261 (2004)

[105] O. Szász: *Generalisation of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval*, J. of Research of the National Bureau of Standards, **45**, 239–245 (1950)

[106] B.L. Sendov: *Some problems on approximation of function and sets in Hausdorff metric(in Russian)*, Usp. Math., Nauk, XXIV, **5(149)**, 141–178 (1969)

[107] B. Sendov, V.Popov: *The convergence of he derivatives of the positive linear operators(Russian)*, C.R. Acad. Bulgare Sci. **22**, 507–509 (1969)

[108] Y.A. Shashkin: *The Milman–Choquet boundary and theory of approximation*, Funct. Anal. Appl. **1**, no. 2, 170-171 (1967)(in Russian)

[109] O. Shisha, B. Mond: *The degree of convergence of linear positive operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **60**, 1196–1200 (1968)

[110] O. Shisha, B. Mond: *The degree of approximation to periodic functions by linear positive operators*, J. Approx. Theory **1**, 335–339 (1968)

[111] R. Schnabl: *Zum globalen Saturationsproblem der Folge der Bernstein-Operatoren*, Acta Sci. Math. (Szeged) **31**, 351358 (1970) (in German)

[112] F. Schurr, W. Steutel: *On the degree of approximation of functions in $C^1[0,1]$ by Bernstein polynomials*, TH–Report 75–WSK–07 (Onderofdeling der Wiskunde, Technische Hogeschool Eindhoven)(1975)

[113] P.C. Sikkema: *Der Wert einer Konstaten in der Theorie der Approximation mit Bernstein–Polynomen*, Numer. Math. **3**, 107–116 (1961)

[114] P.C. Sikkema: *Über Potenzen von verallgemeinerten Bernstein-Operatoren*, Mathematica (Cluj), **8(31)**, 173–180 (1966)

[115] M.R. da Silva: *The Limiting of the Bernstein Iterates: Properties and Applications*, Ph. D Thesis, Imperial College, University of London (1978)

[116] **M. Smuc: *On a Chlodovsky variant of α-Bernstein operator*, Bull. Transilv. Univ. Braşov, Ser. III, 10(59), no. 1, 165-178 (2017)** – 1 citare ISI

[117] **M. Smuc: *On quantitative estimation for the limiting semigroup of positive operators*, Bull. Transilv. Univ. Braşov Ser III 11(60), no. 2, 235-262 (2018)**

[118] D.D. Stancu: *Approximation of functions by a new class of linear polynomials operators*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **13**, no. 8, 1173–1194 (1968)

[119] Z. Stypinski: *Theorem of Voronovskaya for Szász-Chlodovsky operators*, Funct. Approx. Comment. Math. **1** 133–137 (1974)

[120] G. T. Tachev: *The complete asymptotic expansion for Bernstein operators*, J. Math. Anal. Appl. 385, 1179–1183 (2012)

[121] W. B. Temple: *Stieltjes integral representation of convex functions*, Duke Math.J., 21, 527–531 (1954)

[122] V. Totik: *Uniform approximation by positive linear operators on infinite intervals*, Anal, Math. **10**, 163–182 (1984)

[123] V. Totik: *Uniform approximation by Szász–Mirakjian type operators*, Acta. Math. Hungar. **41** no. 3–4,291–307 (1983)

[124] H.F. Trotter: *Approximation of semi-groups of operators*, Pacif. J. Math. **8**, 887–919 (1958)

[125] V.S. Videnskiĭ: Linear Positive Operators of Finite Rank, (in Russian), "A. I Gerzen" State Pedagogical Institute, Leningrad (1985)

[126] T. Vladislav, I. Raşa: *Analiză numerică. Aproximare, problema lui Cauchy abstractă, proiectori Altomare*, Ed. Tehnică, Bucureşti (1999)

[127] E.V. Voronoskaya: *Détérmination de la forme asymptotique de l'approximation des functions par les polynômes de M. Bernstein*, C.R. Acad. Sci. URSS, 79-85 (1932)

[128] I. Yüksel, N. Ispir: *Weighted approximation by a certain family of summation integral-type operators*, Comput. Math. Appl. **52** no. 10-11, 1463-1470 (2006)

[129] S. Wigert: *Sur l'approxmation par polynômes des fonctions continues*, Ark. Math, Astr. Fys. **22 B**, no. 1–4 (1932)

Abstract

In Chaper 1, the own results consist in obtaining general asymptotic estimates using moduli of continuity and demonstrating the optimality of the constants that appear in these estimates. For Videnski's inequality the author obtained the best constant known at present.

The second chapter begins by introducing Bernstein's well-known operator along with a number of its fundamental properties. For this operator, the own results obtained consists in the evaluations of the degree of approximation by using moduli of continuity, the asymptotic constants obtained are optimal. Also an own result is an iterative method by which it was possible to obtain a new class of Bernstein-type operators, for which several properties were studied.

Chapter 3 has as its central theme the approximation of functions by linear and positive operators on non-compact interval, using two types of approximation: uniform approximation on compact intervals and weighted approximation. We use a method of compactification for the convergence problem which was used by Bustamante in [25]. We are interested in obtaining the quantitative results of the degree of approximation using this transformation. So using this method we obtained general estimates of the weighted approximation on non-compact intervals using classical and weighted moduli of continuity. Special attention is given to the weights 1 and $\frac{1}{x^2+1}$. The results obtained were applied to the Szász - Mirakijan and Baskakov operators.

At the end of the chapter, a Chlodovsky-type change is presented for the $alpha$–Bernstein operators. This is a method for obtaining new operators for non-compact interval approximation. For this operators we present the most relevant properties.

Chapter 4 presents general notions regarding the semigroups of operators. The own results obtained consist in quantitative estimates for the limit of the semigroups of linear and positive operators, these being applied in the case of Durrmeyer type operators.

The results obtained for the one-dimensional case of the semigroups generated by the Bernstein operator were extended and for the multidimensional case of the semigroups generated by the multidimensional Bernstein operator.

The bibliography includes 129 papers that are cited during the thesis in case of the results taken over and presented in the paper.

Rezumat

În Capitolul 1, rezultatele proprii constau în obţinerea de estimări asimptotice generale folosind moduli de continuitate şi demonstrarea optimalităţii constantelor care apar în aceste estimări. Pentru inegalitatea lui Videnski autorul a obţinut cea mai bună constantă cunoscută până în prezent.

Al doilea capitol începe prin a prezenta binecunoscutul operator al lui Bernstein împreună cu o serie de proprietăţi fundamentale ale acestuia. Pentru acest operator, rezultatele proprii obţinute constau în evaluări ale gradului de aproximare prin utilizarea modulilor de continuitate, constantele asimptotice obţinute fiind optime. De asemenea, un rezultat propriu este o metodă iterativă prin care s-a putut obţine o nouă clasă de operatori de tip Bernstein, pentru care au fost studiate mai multe proprietăţi.

Capitolul 3 are ca temă centrală aproximarea funcţiilor prin operatori liniari şi pozitivi pe intervale necompacte, folosind două tipuri de aproximare: aproximarea uniformă pe intervale compacte şi aproximarea ponderată.

Folosim o metodă de compactificare pentru problema de convergenţă care a fost folosită de Bustamante în [25]. Suntem interesaţi să obţinem rezultatele cantitative ale gradului de aproximare folosind această transformare. Folosind această metodă şi folosind modulele de continuitate clasice şi ponderate, am obţinut estimări generale ale aproximării ponderate pe intervale necompacte. O atenţie deosebită este acordată ponderilor 1 şi $\frac{1}{x^2+1}$. Rezultatele obţinute au fost aplicate operatorilor Szász - Mirakijan şi Baskakov.

La sfârşitul capitolului, este prezentată o modificare de tip Chlodovsky pentru operatorii $\alpha-$ Bernstein. Aceasta este o metodă pentru obţinerea de noi operatori pentru aproximarea pe intervale necompacte. Pentru aceşti operatori prezentăm cele mai relevante proprietăţi.
Capitolul 4 prezintă noţiuni generale privind semigrupurile de operatori. Rezultatele proprii obţinute constau în estimări cantitative pentru limita semigrupurilor de operatori liniari şi pozitivi, acestea fiind aplicate în cazul operatorilor de tip Durrmeyer.
Rezultatele obţinute pentru cazul unidimensional a semigrupurilor generate de operatorul Bernstein au fost extinse şi pentru cazul multidimensional a semigrupurilor generate de operatorul Bernstein multidimensional.
Bibliografia cuprinde 129 lucrări care sunt citate pe parcursul tezei în cazul rezultatelor preluate şi prezentate în lucrare.